

Zadanie 1 (Kuba Sułkowski)

Wyprowadź z aksjomatów kolejne własności przestrzeni probabilistycznej

Aksjomaty miary probabilistycznej

- $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$
- $P(\Omega) = 1$
- jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest (przeliczalną!) rodziną zbiorów parami rozłącznych, to $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$

Rozwiązanie

(i) $P(\emptyset) = 0$

$\{\Omega, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów parami rozłącznych

Z aksjomatów:

$$P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Korzystając z tej tożsamości będziemy od tej pory mogli używać aksjomatu 3. w wersji skończonej - nieskończenie wiele zbiorów pustych nie zmienia wyniku.

(ii) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

$\{(\Omega \setminus A), A\}$ to skończona rodzina zbiorów parami rozłącznych. W zgodzie z aksjomatem powinniśmy w niej uwzględnić jeszcze nieskończenie wiele zbiorów pustych

$$P((\Omega \setminus A) \cup A) = P(\Omega \setminus A) + P(A)$$

$$P(\Omega) = P(\Omega \setminus A) + P(A)$$

$$P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A)$$

$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

(iii) jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$(B \setminus A), A$ są rozłączne:

$$P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A)$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

(iv) jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$

korzystając z (iii): $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

z aksjomatu P przyjmuje wartości nieujemne: $P(B \setminus A) \geq 0$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

(v) $P(A) \leq 1$

korzystamy z (ii): $P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A)$

P przyjmuje wartości nieujemne: $P(\Omega \setminus A) \geq 0$

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A) \leq 1$$

- (vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 Zauważmy $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Zadanie 2 (Kacper Poneta)

Jeśli $A_{n \in \mathbb{N}}$ jest występującą rodziną zdarzeń, czyli $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, to:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Jeśli $A_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, to:

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Rozwiązanie

Tak to prawda XD;

Dowód

Poniżej podamy dowody dla obu stwierdzeń. W obu przypadkach skorzystamy z prostych własności miary prawdopodobieństwa oraz definicji granicy ciągu liczb rzeczywistych (epsilon – delta, tu: epsilon i indeks N).

1) Rodzina rosnąca: $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$. Niech $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Wykazujemy,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Ponieważ $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla każdego n , ciąg $P(A_n)$ jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, a zatem ma granicę (można to przyjmować jako $L := \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ lub jako $\sup_n P(A_n)$). Pokażemy, że $P(A) = L$.

Zauważmy, że zbior A jest sumą rozłącznych przyrostów:

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \uplus (A_1 \setminus A_0) \uplus (A_2 \setminus A_1) \uplus \dots,$$

gdzie symbolem $\uplus$ oznaczamy rozłączność w sensie rozłożenia na zbiory parami rozłączne.

Dla dowolnego m mamy

$$A_m = A_0 \uplus (A_1 \setminus A_0) \uplus \dots \uplus (A_m \setminus A_{m-1}).$$

Korzystając z addytywności prawdopodobieństwa na zbiorach parami rozłącznych dostajemy

$$P(A_m) = P(A_0) + \sum_{k=1}^m P(A_k \setminus A_{k-1}).$$

Jeśliśmy dla $m \rightarrow \infty$, to z monotoniczności i jednocześnie nieujemności wyrazów szeregu mamy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}).$$

Równocześnie

$$P(A) = P\left(\biguplus_{k=0}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})\right) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}),$$

stąd $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Można to również sformalizować bez rozkładu na przyrosty, używając definicji granicy: dla danego $\varepsilon > 0$ niech $L = \lim_n P(A_n) = \sup_n P(A_n)$. Istnieje indeks N taki, że dla $n \geq N$ mamy $P(A_n) > L - \varepsilon$. Ponieważ $A_n \uparrow A$, to $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$ i z podzielności miary $P(A) - P(A_n) = P(A \setminus A_n) \rightarrow 0$, skąd $P(A) = L$.

2) Rodzina malejąca: $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Niech $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Zakładamy dodatkowo, że istnieje k takie, że $P(A_k) < \infty$ (w kontekście probabilistycznym zwykle P jest miarą skończoną i ta hipoteza jest automatycznie spełniona). Chcemy pokazać, że

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Rozważmy zbiory $B_n := A_0 \setminus A_n$. Ponieważ A_n jest malejący, to B_n jest rosnący i

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = A_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \setminus A.$$

Z pierwszej części dowodu (ciągi rosnące) mamy

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

Ale $P(B_n) = P(A_0) - P(A_n)$ dla każdego n (ponieważ B_n i A_n rozdziela A_0), stąd

$$P(A_0) - P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_0) - P(A_n)) = P(A_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Po uproszczeniu otrzymujemy $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$, co kończy dowód.

Uwaga o hipotezie skończoności: Jeśli $P(A_0) = \infty$ (nie jest to sytuacja typowa dla prawdopodobieństwa, ale może wystąpić dla ogólnych miar), to równanie $P(B_n) = P(A_0) - P(A_n)$ nie ma sensu; w teorii miar stosuje się wtedy warunek, że istnieje przynajmniej jeden indeks k z $P(A_k) < \infty$, co umożliwia analogiczny argument na przesuniętym ciągu.

Zadanie 3 (Dominik, wcześniej Krzysztof Peszko)

Udowodnij, że dla dowolnego ciągu $A_0, A_1, \dots$ zachodzi:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

Rozwiązanie

Definiujemy nowy ciąg **rozłącznych zdarzeń**: $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

Można pokazać, że: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \end{aligned}$$

Pierwsze przejście mamy z definicji miary probabilistycznej, dzięki temu że zdarzenia w rodzinie $\{B_n\}$ są parami rozłączne.

Nierówność mamy, bo dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $B_n \subseteq A_n$, więc $P(B_n) \leq P(A_n)$.

Otrzymana nierówność kończy dowód.

Zadanie 4 (Michał)

Niech $A_0, A_1, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(A_n) = 1$ dla każdego n . Udowodnij, że $P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = 1$

Rozwiązanie

Dla każdego n mamy $P(A_n) = 1$, więc dla każdego dopełnienia zdarzenia $A'_n = \Omega - A_n$ mamy: $P(A'_n) = 1 - P(A_n) = 0$.

Zauważmy, że dopełnienie przecięcia jest równe sumie dopełnień

$$(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)' = \bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n$$

Teraz korzystamy z nierówności pomiędzy prawdopodobieństwem sumy a sumą prawdopodobieństw (Zadanie 3), z czego ładnie nam wychodzi teza

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A'_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n) = 0$$

$$P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = 1 - 0 = 1$$

Zadanie 5 (Filip Maniak)

Podaj przykład zdarzeń X, Y, Z , takich że każde dwa są niezależne, ale cała trójka nie jest niezależna. Podaj przykład $n + 1$ zdarzeń takich, że każde n z nich są niezależne, ale wszystkie $n + 1$ są zależne.

Rozwiązanie

Przykład dla 3: Mamy zdarzenia elementarne (równie prawdopodobne i niezależne) A_1, A_2, A_3, A_4 . Wtedy:

$$X = A_1 \cup A_2; Y = A_1 \cup A_3; Z = A_1 \cup A_4$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo $P(X) = P(Y) = P(Z) = 0.5$, oraz prawdopodobieństwa $P(X \cap Y) = P(Z \cap X) = P(Y \cap Z) = 0.25 = P(X) \cdot P(Y)$, czyli działa. Jednak $P(X \cap Y \cap Z) = 0.25 \neq (0.5)^3$.

Przykład dla $n + 1$ Jako przestrzeń zdarzeń elementarnych bierzemy punkty kostki $\{0, 1\}^n$. Teraz definiujemy zdarzenia: $X_1, \dots, X_n$ jako zdarzenia zachodzące, gdy punkt ma i -tą współrzędną równą 1, oraz Y jako zachodzące jeżeli suma współrzędnych jest parzysta. Łatwo zauważyć że $P(X_1 \cap \dots \cap X_n) = P(X_1) \cdot \dots \cdot P(X_n)$ oraz że prawdopodobieństwo każdego podzbioru $n - 1$ X -ów (Z) i Y też spełnia: $P(Z \cap Y) = P(Z) \cdot P(Y)$. Jednak prawdopodobieństwo wszystkiego razem: $P(X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y) \neq (0.5)^{n+1}$ ponieważ w świecie zawierającym 2^n elementów (równie prawdopodobnych!!!) żadne zdarzenie nie może mieć takie prawdopodobieństwa (gdyby miało, to $P(\Omega) \leq P(X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y) \cdot 2^n = 0.5 \neq 1$ (z prawdopodobieństwa sumy).

Zadanie 6 (Mateusz Wojaczek)

Pokaż, że jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne, to zdarzenia

$$\Omega \setminus A_1, \Omega \setminus A_2, \dots, \Omega \setminus A_n$$

również są niezależne.

Rozwiązanie

Założenie (niezależność zdarzeń $A_1, \dots, A_n$)

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Teza do udowodnienia

Dla dowolnego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ zachodzi

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)\right) = \prod_{i \in I} P(\Omega \setminus A_i).$$

Dowód

Niech $I \subseteq [n]$. Rozpoczynamy od przekształcenia przecięcia dopełnień przy użyciu prawa De Morgana:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)\right) &= P\left(\Omega \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) \text{ (De Morgan)} \\ &= P(\Omega) - P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right). \end{aligned}$$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)\right) = 1 - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right).$$

Ponieważ zdarzenia A_i są niezależne

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i),$$

więc

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)\right) = 1 - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Teraz zauważamy, że suma odpowiada funkcji tworzącej iloczynu:

$$\sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \prod_{i \in J} P(A_i) = 1 - \prod_{i \in I} (1 - P(A_i)).$$

Podstawiając to, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)\right) &= 1 - \left[1 - \prod_{i \in I} (1 - P(A_i))\right] \\ &= \prod_{i \in I} (1 - P(A_i)) \\ &= \prod_{i \in I} P(\Omega \setminus A_i). \end{aligned}$$

Odpowiedź

□

Zadanie 7 (Olek Wieczorek)

Niech $A_0, A_1, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(\Omega - A_n) \leq \frac{1}{3^n}$ dla każdego n . Uzasadnij, że

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie

Na początku musimy zauważyć, że:

$$\Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)$$

Najprościej jest to narysować i "to widać". Machając rękami możemy powiedzieć, że prawa strona dla każdego i bierze wszystko co nie leży w A_i . Po zsumowaniu okaże się, że dostaniemy wszystko oprócz przecięcia, czyli lewą stronę.

Dalsza część jest już dosyć prosta.

Korzystając z powyższej obserwacji dostaniemy:

$$P(\Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right)$$

co daje:

$$1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right)$$

$$1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Teraz przekształcamy tezę:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right) \leq \frac{1}{2}$$

Teraz wystarczy tylko pokazać, że $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)) \leq \frac{1}{2}$. Z zadania 3. wiemy, że

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

teraz obliczmy naszą sumę korzystając z $P(\Omega - A_n) \leq \frac{1}{3^n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\Omega - A_n) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Co daje:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\Omega - A_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \leq \frac{1}{2}$$

Zadanie 8 (OSKIBOSKI123)

Do N ponumerowanych listów wkładamy losowo N liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna liczba nie trafi do odpowiedniego listu?

Rozwiązanie

Całe zadanie to jest dosłownie zasada włączeń i wyłączeń.

Niech A_i - zdarzenie, że i -ta liczba trafiła do i -tego listu (dla $i = 1, 2, \dots, N$).

Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$\left| \bigcup_{i=1}^N A_i \right| = \sum_{\substack{I \subseteq [N] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Obliczenie mocy przekrojów

Dla ustalonego $I \subseteq [N]$ z $|I| = k$:

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (N - k)!$$

ponieważ jeśli k liczb jest na swoich miejscach, to pozostałe $N - k$ liczb można rozmieścić dowolnie.

Liczba takich podzbiorów I to $\binom{N}{k}$, więc:

$$\sum_{\substack{I \subseteq [N] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \binom{N}{k} (N - k)!$$

Moc zdarzenia że przynajmniej jedna liczba trafiła dobrze

$$\left| \bigcup_{i=1}^N A_i \right| = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \binom{N}{k} (N - k)!$$

Prawdopodobieństwo że przynajmniej jedna liczba trafiła dobrze

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \frac{\left|\bigcup_{i=1}^N A_i\right|}{N!} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\binom{N}{k} (N - k)!}{N!} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

Prawdopodobieństwo że żadna liczba nie trafiła dobrze

$$P(\text{żadna liczba nie trafiła do odpowiedniego listu}) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right)$$

$$P(\text{żadna liczba nie trafiła do odpowiedniego listu}) = 1 - \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$$

Odpowiedź

$$\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$$

Zadanie 9 (Jakub Stepianiuk)

Niech $q \in \{0, 1\}^{19}$ będzie arbitralnie wybranym 19-elementowym ciągiem zer i jedynek. Rzucamy wielokrotnie symetryczną monetą (tj. taką, że orzeł i reszka wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem) i notujemy rezultaty tworząc w ten sposób ciąg. Jeśli wypadł orzeł notujemy 0, jeśli reszka 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg q wystąpi (być może po wielu rzutach) jako spójny podciąg notowanego ciągu?

Rozwiązanie

Intuicja podpowiada, że prawdopodobieństwo to będzie wynosić 1, ale nie jest raczej tak prosto dotrzeć do tego bezpośrednio. Zamiast liczyć prawdopodobieństwo wystąpienia ciągu q przy rzucaniu pojedynczymi monetami, znacznie łatwiej będzie liczyć prawdopodobieństwo, jeśli będziemy rzucać blokami po 19. A konkretniej:

B - zdarzenie polegające na tym, że w ciągu wystąpił ciąg q po pewnej liczbie rzutów.

B_i - zdarzenie polegające na tym, że w ciągu pierwszych i lub mniej serii rzutów po 19 monet, któraś z serii była ciągiem q .

Zauważmy, że $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń (patrz zad. 2) oraz suma po tej rodzinie implikuje zdarzenie B . Wyliczamy także prawdopodobieństwo zdarzenia B_i poprzez zdarzenie przeciwne. Wystarczy połączyć to wszystko następująco:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right]^n \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right]^n\right) = 1 \\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \implies B\right) &\implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq P(B) \\ 1 &\leq P(B) \leq 1 \\ P(B) &= 1 \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$P(B) = 1$$

Zadanie 10 (Mikołaj)

Startujemy doświadczenie z liczbą k ($0 \leq k \leq n$). Barrierami są liczby 0 i n . Dopóki aktualna liczba nie jest jedną z barier do aktualnej liczby dodajemy 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w którąś z barier? Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n ?

Rozwiązanie

Pierwsze rozwiążmy prostszą część, czyli prawdopodobieństwo uderzenia w dowolną z barier. Możemy zauważyć, że jeśli w naszym ciągu jedynek i minus jedynek pojawi się w jakiegokolwiek chwili $n-1$ jedynek pod rząd, to wiemy, że ten ciąg na pewno uderza w którąś z barier. Zadanie to sprowadza się więc do zadania 9, z którego wiemy, że prawdopodobieństwo wystąpienia takiego ciągu jedynek w naszym ciągu wynosi 1 .

Teraz rozważmy prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n . Niech:

X_i - zdarzenie polegające na tym, że spacer uderzył w n dla $k = i$.

Można zauważyć, że $P(X_0) = 0$, bo dla $k = 0$ spacer natychmiastowo uderza w barierę 0 , a $P(X_n) = 1$, bo dla $k = n$ spacer od razu uderza w n . Dodatkowo możemy zauważyć, że:

$$\forall i \in [n-1] P(X_i) = \frac{P(X_{i-1})}{2} + \frac{P(X_{i+1})}{2}$$

Używając tego wzoru, możemy teraz policzyć stosunek $P(X_1)$ do $P(X_2)$, później $P(X_2)$ do $P(X_3)$, itd. Udowodnię indukcyjnie, że $P(X_i) = \frac{i}{i+1} P(X_{i+1})$. Baza indukcji:

$$P(X_1) = \frac{P(X_0)}{2} + \frac{P(X_2)}{2} = \frac{P(X_2)}{2}$$

Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} P(X_i) &= \frac{i}{i+1} P(X_{i+1}) \\ P(X_{i+1}) &= \frac{P(X_i)}{2} + \frac{P(X_{i+2})}{2} = \frac{i P(X_{i+1})}{2i+2} + \frac{P(X_{i+2})}{2} \\ \frac{P(X_{i+1})(i+2)}{2i+2} &= \frac{P(X_{i+2})}{2} \\ P(X_{i+1}) &= \frac{P(X_{i+2})}{2} \frac{2i+2}{i+2} = \frac{i+1}{i+2} P(X_{i+2}) \end{aligned}$$

W takim razie, zachodzi:

$$P(X_i) = \frac{i}{i+1} P(X_{i+1}) = \frac{i}{i+1} \frac{i+1}{i+2} P(X_{i+2}) = \frac{i}{i+1} \frac{i+1}{i+2} \cdots \frac{n-1}{n} P(X_n) = \frac{i}{n} P(X_n) = \frac{i}{n}$$

A więc dla ustalonego k , prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n to $\frac{k}{n}$.

Odpowiedź

Prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w którąś z barier = 1

Prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w $n = \frac{k}{n}$

Zadanie 11 (Wiktor K)

W urnie znajdują się dwie kule: jedna czarna i jedna biała. W każdej z $n - 2$ rund losujemy w sposób jednostajny jedną kulę z urny i dokładamy do urny kulę o tym samym kolorze co wylosowana. Pokaż, że liczba białych kul w urnie na końcu jest z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z liczb ze zbioru $[n - 1]$.

Rozwiązanie

k – końcowa liczba białych kul w urnie.

Wszystkich możliwości losowania mamy $(n - 1)!$ (najpierw losujemy z 2 kul, później z 3 itd. aż do $n - 1$).

Policzmy teraz, ile jest możliwości losowań, aby końcowo liczba białych kul w urnie była równa k .

- $\binom{n-2}{k-1}$ – wybór rund, w których wylosowano białe kule,
- $(k - 1)!$ – możliwości wylosowania białych kul,
- $(n - k - 1)!$ – możliwości wylosowania czarnych kul.

Zatem prawdopodobieństwo, że na koniec w urnie będzie k białych kul wynosi:

$$\frac{\binom{n-2}{k-1}(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-2)!(k-1)!(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n-1}.$$

Niezależnie od wartości k , prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{n-1}$.

Zadanie 12 (Dominik & Hubert)

(Bratobójczy pojedynek) Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze walczą w systemie turniejowym (jakże by inaczej?). Uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Drabinka turnieju jest układana losowo.

Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

Rozwiązanie

Niech $\{A_i\}_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$ to rodzina parami rozłącznych zdarzeń, gdzie A_i to zdarzenie, że bracia spotkają się w swoim $i+1$ pojedynku.

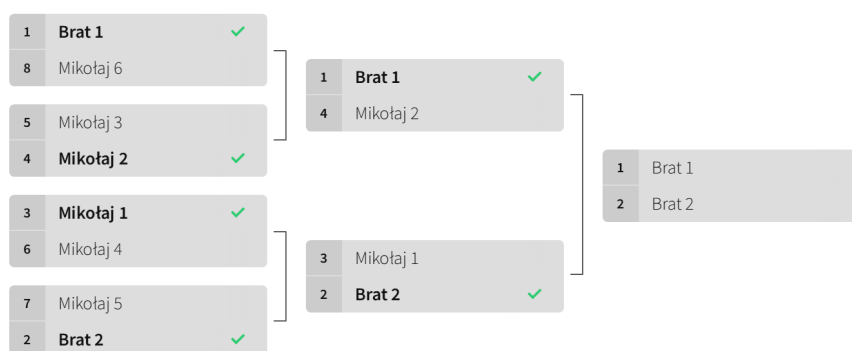
Wówczas

$$P(A_i) = \frac{2^i}{2^n - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^{-i}}{2^n - 1}.$$

Pierwszy czynnik $\frac{2^i}{2^n - 1}$ to prawdopodobieństwo, że drugi brat znalazł się w odpowiednim miejscu w drabince – jest $2^n - 1$ możliwych miejsc, a 2^i z nich prowadzi do pojedynku na poziomie $i+1$ (wchodzimy i poziomów do góry, przechodzimy do sąsiada i patrzymy na liście jego poddrzewo, które ma i poziomów).

Pozostałe dwa czynniki $\left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$ to prawdopodobieństwa, że obaj bracia wygrają wszystkie wcześniejsze pojedynki, aby dotrzeć do pojedynku $i+1$ (zakładamy niezależność pojedynków i równą szansę każdego uczestnika – stąd można wymnożyć prawdopodobieństwa).

Przykład Dla $n = 3$ i $i = 2$, czyli jest $2^3 = 8$ uczestników, bracia spotykają się w 3. pojedynku:



Jest $2^i = 4$ miejsc, które prowadzą do pojedynku 3, które wcześniej nie walczą z bratem 1.

Jest $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$ możliwych miejsc dla brata 2 (wszystkie poza miejscem brata 1).

Dodatkowo, aby bracia spotkali się w 3. pojedynku, obaj muszą wygrać swoje wcześniejsze pojedynki (po 2 zwycięstwa każdy), co zdarza się z prawdopodobieństwem $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Stąd w tym przypadku:

$$P(A_2) = \frac{2^i}{2^n - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$$

Ostatecznie zdarzenie A , że bracia spotkają się w turnieju, to

$$A = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i,$$

więc

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n-1} P(A_i) = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} = \frac{2(1 - 2^{-n})}{2^n - 1} = \boxed{2^{1-n}}.$$

Odpowiedź

$$\boxed{2^{1-n}}$$

Zadanie 13 (Dominik)

Dana jest moneta asymetryczna, która z nieznanym Ci prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$ zwraca orła i z prawdopodobieństwem $1 - p$ zwraca reszkę. Zaproponuj algorytm, który będzie symulował zachowanie monety symetrycznej, to znaczy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zwróci orła bądź reszkę. Jedyne co możesz robić to rzucać monetą asymetryczną i na bazie obserwowanych rezultatów kontynuować rzucanie bądź przerwać i zwrócić wynik. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą asymetryczną przed zwróceniem wyniku? Wynik podaj jako funkcję p .

Algorytm

- Rzuć monetą dwa razy, wynik i -tego rzutu to $e_i \in \{00, 0R, R0, RR\}$.
- Jeżeli $e_i = 0R$ to zwróć R.
- Jeżeli $e_i = R0$ to zwróć 0.
- Jeżeli $e_i = 00$ lub $e_i = RR$ to powtórz algorytm.

Model probabilistyczny

$\Omega = \{00, 0R, R0, RR\}^{\mathbb{N}}$ – zdarzeniami w tym modelu są ciągi par rzutów.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ to rodzina zdarzeń niezależnych, gdzie A_i to zdarzenie, że i -ta para rzutów daje 0R lub R0, czyli kończy algorytm:

$$A_i = \left\{ e \in \Omega \mid e_i \in \{0R, R0\} \right\}$$

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} P(e_i = 00) = p^2$$

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} P(e_i = RR) = (1 - p)^2$$

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} P(A_i) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p)$$

Takie zdarzenia są niezależne. Oba zdarzenia kończące algorytm są równoprawdopodobne, więc algorytm zwróci 0 i R z takim samym prawdopodobieństwem.

Wprowadźmy zmienną losową $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ oznaczającą liczbę par rzutów wykonanych przez algorytm. $P(X = 0) = 0$. Dla $n \in \mathbb{N}_+$ mamy:

$$\begin{aligned} P(X \geq n) &= P\left(\underbrace{(\Omega \setminus A_0) \cap (\Omega \setminus A_1) \cap \dots \cap (\Omega \setminus A_{n-1})}_{\text{pierwsze } n-1 \text{ rzutów nie zakończyło algorytmu}}\right) \\ &= (1 - P(A_0))(1 - P(A_1)) \dots (1 - P(A_{n-1})) \quad (\text{z niezależności}) \\ &= (1 - 2p(1 - p))^{n-1} \end{aligned}$$

X przyjmuje jedynie wartości w liczbach naturalnych więc z lematu P&C z Sufferingu mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2p(1 - p))^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2p(1 - p))^n \\ &= \frac{1}{2p(1 - p)} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2p(1-p)}$ to oczekiwana liczba par rzutów, więc oczekiwana liczba rzutów to:

$$\boxed{\frac{1}{p(1-p)}}$$

Zadanie 14 (Stanisław Macura)

Każdy z n graczy rzuca niezależnie od pozostałych kostki.

- (i) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje 1 punkt. Znaleźć wartość oczekiwaną.
- (ii) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje tyle punktów ile wyrzucili. Znajdź wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie

(i) Z liniowości wartości oczekiwanej możemy rozbić zmienną losową na sumę $\binom{n}{2}$ wartości oczekiwanych, w której każdy element sumy oznacza wartość oczekiwaną punktów zdobytych przez daną parę graczy. Dla jednej pary graczy prawdopodobieństwo na wyrzucenie tej samej liczby oczek wynosi $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ co daje nam wartość oczekiwaną zdobytych punktów przez jedną parę $\frac{1}{6}$ i ostateczna odpowiedź $\binom{n}{2} * \frac{1}{6}$.

(ii) Rozbijamy problem jak w punkcie i). Jedyne co się zmienia to wartość oczekiwana zdobytej liczby punktów przez parę graczy. Liczymy ją z definicji i mamy $\frac{1}{36} * 1 + \frac{1}{36} * 2 + \frac{1}{36} * 3 + \frac{1}{36} * 4 + \frac{1}{36} * 5 + \frac{1}{36} * 6 = \frac{7}{12}$ Ostateczny wynik wynosi więc $\binom{n}{2} * \frac{7}{12}$.

Odpowiedź

$$\boxed{\text{i) } \binom{n}{2} * \frac{1}{6} \quad \text{ii) } \binom{n}{2} * \frac{7}{12}}$$

Zadanie 15 (Filip Manijak)

Niech π będzie losową permutacją zbioru $[n]$. Punkt stały permutacji π to taki x , że

$$\pi(x) = x.$$

Wyznacz oczekiwaną liczbę punktów stałych permutacji π .

Rozwiązanie

Naszą zmienną losową X rozbijamy na sumę indykatorów tego że i jest punktem stałym, tj:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \sum \mathbb{E}[X_i] = \sum \frac{1}{n} = 1$$

Ponieważ wiemy, że $\mathbb{E}[X_i] = P(\pi(i) = i) = \frac{1}{n}$ ponieważ permutacji dla których $\pi(i) = j$ jest tyle samo dla każdego j (symetria).

Odpowiedź

$$\boxed{1}$$

Zadanie 16 (Pavlo Tsikalysyn)

Inwersja w permutacji π to para indeksów $i < j$ taka że $\pi(i) > \pi(j)$. Wyznacz oczekiwaną liczbę inwersji losowej permutacji π zbioru $[n]$.

Rozwiązanie

Rozbijemy zmienną losową X na sumę po $X_{i,j,x,y}$ takich że $\pi(i) = x, \pi(j) = y, i < j, x > y$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i < j} \sum_{x > y} X_{i,j,x,y}\right] = \sum_{i < j} \sum_{x > y} \mathbb{E}[X_{i,j,x,y}] = \sum_{i < j} \sum_{x > y} \frac{1}{n(n-1)} = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Bo:

$$\mathbb{E}[X_{i,j,x,y}] = P(\pi(i) = x \cap \pi(j) = y) = P(\pi(i) = x)P(\pi(j) = y | \pi(i) = x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{4}}$$

Zadanie 17 (Wiktoria Marć)

n osób ($n \geq 4$) usiadło formując okrąg. Każda osoba w sposób losowy wybrała sąsiada. Jaka jest oczekiwana liczba osób niewybranych przez nikogo? A jaka jest odpowiedź jeśli te osoby siedzą w linii (czyli skrajne osoby mają tylko jednego sąsiada)?

Rozwiązanie

Najpierw pierwsza część. Niech X - zmienna losowa oznaczająca ilość osób niewybranych przez nikogo. Ponumerujmy osoby na okręgu numerami od 1 do n . Zauważmy, że możemy zapisać:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

gdzie X_i przyjmuje wartość 0, jeśli osoba o numerze i została wybrana przez jednego ze swoich sąsiadów, a wartość 1 w przypadku gdy przez żadnego nie została wybrana. Z liniowości wartości oczekiwanej mamy, że:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = n \cdot \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

ponieważ prawdopodobieństwo że dana osoba nie zostanie wybrana wynosi $\frac{1}{4}$ - obaj sąsiedzi musieliby wybrać swoich drugich sąsiadów, a to następuje z prawdopodobieństwem $(\frac{1}{2})^2$.

Druga część analogicznie, z tym że numerując sąsiadów od lewej do prawej zauważmy, że $E[X_1] = E[X_n] = \frac{1}{2}$ oraz $E[X_2] = E[X_{n-1}] = 0$ (bo zawsze zostaną wybrani przez osoby skrajne) a poza tym, jak wyżej, dla pozostałych indeksów $E[X_i] = \frac{1}{4}$. Wobec tego:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=3}^{n-2} X_i\right] + E[X_1] + E[X_n] + E[X_2] + E[X_{n-1}] = \sum_{i=3}^{n-2} E[X_i] + 2E[X_1] + 2E[X_{n-1}]$$

Czyli:

$$E[X] = (n-4) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{n}{4}$$

Odpowiedź

Gdy siedzą w kółku $\frac{n}{4}$, gdy w linii $\frac{n}{4}$