

Zadanie 1 (Jakub Stepaniuk)

Niech T będzie dowolnym drzewem z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami: startowym i końcowym. Pionek w sposób losowy porusza się po drzewie rozpoczynając w wierzchołku startowym. W każdym kroku pionek przemieszcza się na losowo wybranego sąsiada aktualnego wierzchołka. Czy dla dowolnego drzewa pionek dojdzie, z prawdopodobieństwem 1, do wierzchołka końcowego?

Rozwiązanie

Być może da się to zrobić jakoś bardziej elegancko, ale wystarczy tu wykonać trochę szacowania i wyjdzie. Niech T - drzewo z zadania o wierzchołku końcowym t . Dodatkowo:

$$\begin{aligned} \max_dist(G) &= \max_{v \in V(G)} dist(v, t) \\ \Delta(G) &= \max_{v \in V(G)} deg(v) \end{aligned}$$

...Albo po prostu maksymalna odległość od końcowego i maksymalny stopień w grafie.

Dla naszego grafu, dla każdego wierzchołka innego niż t przypisujemy liczby do każdej wychodzącej z niego krawędzi, zaczynając od 1 dla tej krawędzi, która prowadzi do t . Każdy wierzchołek ma maksymalnie $\Delta(G)$ krawędzi wychodzących oraz jest o maksymalnie $\max_dist(G)$ krawędzi oddalony od t .

Oznacza to, że losując kolejno krawędzie, którymi się poruszamy, wylosowanie ciągu $\max_dist(G)$ jedynek doprowadzi nas do t niezależnie od wierzchołka, z którego rozpoczęliśmy losowanie.

Losujemy więc liczby ze zbioru $[\Delta(G)]$ w blokach po $\max_dist(G)$ i poruszamy się wylosowanymi krawędziami, aż nie dotrzemy do t (jeśli wylosujemy liczbę większą niż liczba dostępnych krawędzi, ignorujemy rzut, tak jakby rzucamy ponownie).

Prawdopodobieństwo nie wystąpienia bloku $\max_dist(G)$ jedynek po wyrzuceniu k kolejnych bloków prezentuje się następująco:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\Delta(G)^{\max_dist(G)}}\right)^k$$

Niech B_k to zdarzenie polegające odniesieniu sukcesu nie później niż k -ty rzut. Ograniczamy zdarzenie z zadania przez zdarzenie $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ i przez $B_i \subseteq B_{i+1}$ dostajemy:

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\Delta(G)^{\max_dist(G)}}\right)^k\right] = 1$$

Stąd mamy prawdopodobieństwo dotarcia pionka do wierzchołka końcowego równe 1.

Odpowiedź

Tak, dla dowolnego drzewa pionek dojdzie do wierzchołka końcowego.

Zadanie 2 (Hubert Jastrzębski)

(Spacer losowy z jedną barierą) Startujemy doświadczenie z liczbą 0. Dopóki aktualna liczba jest mniejsza od n , dodajemy do niej 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dotrzemy do n ?

Rozwiązanie

Niech A_i to zdarzenie polegające na tym, że doszliśmy do n przed dojściem do $-i$.

Zauważmy, że $\forall_{i \in \mathbb{N}_+} A_i \subset A_{i+1}$

(ponieważ jeśli doszliśmy do n przed $-i$, to na pewno doszliśmy do n przed $-(i+1)$).

Zatem z [Zestaw 1 Zadanie 2] mamy, że:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

Chcemy teraz policzyć $P(A_i)$. Zauważmy, że możemy to przedstawić jako spacer losowy z dwoma barierami na pozycjach 0 oraz $n+i$, który zaczyna się na pozycji i (ponieważ przesuwamy wszystkie pozycje o $+i$, więc jest to równoważne A_i , gdzie mamy bariery na $-i$ oraz n i startujemy w 0). Natomiast z [Zestaw 1 Zadanie 10] wiemy, że coś takiego wynosi $\frac{i}{n+i}$.

Tak więc:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{n+i} = 1$$

Zostaje nam zastanowienie się czym jest $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Jest to zbiór wszystkich trajektorii spaceru losowego, które w pewnym momencie osiągną poziom n . Jeśli więc prawdopodobieństwo na wystąpienie jakiegoś zdarzenia z tego zbioru wynosi 1, to znaczy, że z prawdopodobieństwem 1 w pewnym momencie osiągniemy poziom n .

Odpowiedź

1

Zadanie 3 (Dominik)

Dana jest moneta symetryczna. Zaproponuj algorytm, który będzie symulował zachowanie monety asymetrycznej o ustalonym wymiernym $p \in (0, 1)$. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów (symetryczną monetą) przed zwróceniem wyniku (symulowanej asymetrycznej monety)? Im mniejsza oczekiwana liczba rzutów, tym lepiej.

Wprowadzenie do rozwiązania

Niech p oznacza prawdopodobieństwo, że wynikiem rzutu symulowaną asymetryczną monetą będzie orzeł.

Niech $\frac{a}{b} = p$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}_1$, $a < b$ oraz a i b są względnie pierwsze. Niech $N = \lceil \log_2 b \rceil$.

Zakładam, że w kroku algorytmu mogę zwrócić jedynie ostatnio wyrzuconą wartość. Jeżeli mogę zwrócić dowolną, to $N + 1$ rzut w zaproponowanym algorytmie nie jest konieczny.

Algorytm

W i -tym kroku ($i \in \mathbb{N}_1$):

- Rzuć monetą $N + 1$ razy.
- Potraktuj pierwsze N wyrzuconych monet jako zapis binarny liczby x (traktując orła jako 1 i reszkę jako 0). x będzie z przedziału $x \in [0, 2^N) \supseteq [0, b)$. Każda wartość z tego przedziału jest równie prawdopodobna.
- W zależności od x :
 - Zdarzenie $A_i - x \in [0, a)$ i ostatni rzut to orzeł: zwróć orła.
 - Zdarzenie $B_i - x \in [a, b)$ i ostatni rzut to reszka: zwróć reszkę.
 - Jeżeli nie zaszło A_i ani B_i : powtórz rzuty (przejdź do kolejnego kroku).

Analiza prawdopodobieństwa

Niech $C_i = A_i \cup B_i$.

Niech X to zmienna losowa oznaczająca numer (i) pierwszego kroku w którym zaszło zdarzenie C_i .

Zauważmy, że te losowania są **bez pamięci** – wynik losowania i nie zależy od wyników poprzednich losowań. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(A_i \mid X \geq i) &= \underbrace{\frac{a}{2^N}}_{x \in [0, a)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ostatni rzut to orzeł}} = \frac{a}{2^{N+1}} \\ \bullet \quad P(B_i \mid X \geq i) &= \underbrace{\frac{b-a}{2^N}}_{x \in [a, b)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ostatni rzut to reszka}} = \frac{b-a}{2^{N+1}} \end{aligned}$$

- A_i i B_i są rozłączne więc $P(C_i \mid X \geq i) = P(A_i \mid X \geq i) + P(B_i \mid X \geq i) = \frac{b}{2^{N+1}}$

X ma rozkład geometryczny o parametrze $q = \frac{b}{2^{N+1}}$:

$$P(X = n) = P\left((\Omega \setminus C_1) \cap \dots \cap (\Omega \setminus C_{n-1}) \cap C_n\right) = (1 - q)^{n-1} \cdot q$$

Z wykładu wiemy, że wartość oczekiwana X w tym przypadku to $E[X] = \frac{1}{q} = \frac{2^{N+1}}{b}$.

Niech Y oznacza oczekiwaną liczbę rzutów monetą. W każdym kroku rzucaliśmy monetą $N + 1$ razy, więc:

$$E[Y] = (N + 1) \cdot E[X] = (N + 1) \cdot \frac{2^{N+1}}{b}$$

Odpowiedź

Jeżeli $p = \frac{a}{b}$ oraz $N = \lceil \log_2 b \rceil$ to wynikiem jest:

$$(N + 1) \cdot \frac{2^{N+1}}{b}$$

W wersji zadania w której w kroku algorytmu mogę zwrócić dowolną wartość, nie tylko ostatnio wyrzuconą, wynikiem jest:

$$N \cdot \frac{2^N}{b}$$

Dla tej wersji nie ma dowodu powyżej, ale można go łatwo uprościć.

Zadanie 4 (Pavlo Tsikalysyn)

Cyklem długości k w permutacji π nazywamy ciąg indeksów $a_1, \dots, a_k, a_{k+1} = a_1$ taki że $\pi(a_i) = a_{i+1}$. Każdą permutację π można jednoznacznie rozłożyć na rozłączne cykle. Wyznacz oczekiwaną liczbę cykli w losowej permutacji π .

Rozwiązanie

Z definicji mamy że:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n i \frac{\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] = \frac{n! H_n}{n!} = H_n$$

$\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right]$ - liczba Stirlinga pierwszego rodzaju, liczba permutacji zbioru n -elementowego złożonych z i cykli. Z drugiego zestawu dyskretniej z zadania 4 wiemy że $\sum_{i=1}^n i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] = n! H_n$.

Odpowiedź

$$H_n$$

Zadanie 5 (Kacper Orszulak)

Niech T_n będzie pełnym drzewem binarnym o głębokości n (czyli T_n ma $2^n - 1$ wierzchołków). Każda krawędź T_n zostaje usunięta z prawdopodobieństwem $1/2$ i niezależnie od akcji na innych krawędziach. Jaka jest oczekiwana liczba wierzchołków w spójnej składowej z korzeniem w wynikowym lesie?

Rozwiązanie

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek v na głębokości k będzie w spójnej składowej korzenia? $\mathcal{P}(I_v = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, ponieważ jednocześnie wszystkie k krawędzi od korzenia do v muszą być nieusunięte. Zatem $\mathbb{E}(I_k) = 0 \cdot \mathcal{P}(I_v = 0) + 1 \cdot \mathcal{P}(I_v = 1) = \mathcal{P}(I_v = 1)$. Niech $X = \sum_{v \in V} I_v$ to zmienna losowa liczby wierzchołków w spójnej składowej korzenia. Dostajemy

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{v \in V} I_v\right) = \sum_{v \in V} \mathbb{E}(I_v) = \sum_{v \in V} \mathcal{P}(I_v = 1) = \sum_{v \in V} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = n.$$

Odpowiedź

$$n$$

Zadanie 6 (Wiktor K)

POLECENIE

W tali $2n$ kart mamy n czerwonych i n czarnych kart. Talia jest potasowana i kolejno wszystkie karty są układane na stół. Dla każdej wyciągniętej czerwonej karty, jeżeli po jej wyciągnięciu na stole jest więcej czerwonych niż czarnych kart, to zdobywamy jeden punkt. Jaka jest oczekiwana liczba zdobytych punktów?

Rozwiązanie

Niech X - liczba zdobytych punktów

$X = \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i\text{-ta czerwona karta zdobywa punkt} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\forall_{i \in [n]} P(X_i) = \frac{1}{2}$$

ponieważ możemy bijektywnie przekształcić każdą konfigurację, w której i -ta czerwona karta zdobywa punkt w konfigurację, w której i -ta czerwona karta nie zdobywa punktu (wystarczy odwrócić kolory kart)

Zatem

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n P(X_i = 1) = \frac{n}{2}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{n}{2}}$$

Zadanie 7 (Olek Wieczorek)

W samolocie leci $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1$ rodzin, gdzie n_i rodzin ma i sztuk bagażu, dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a nasza rodzina jest jedyną z pięcioma bagażami.

Przyjmując, że kolejność wydawania walizek jest losowa, jaka jest oczekiwana liczba rodzin, które będą czekać dłużej od naszej na swoje bagaże?

Rozwiązanie

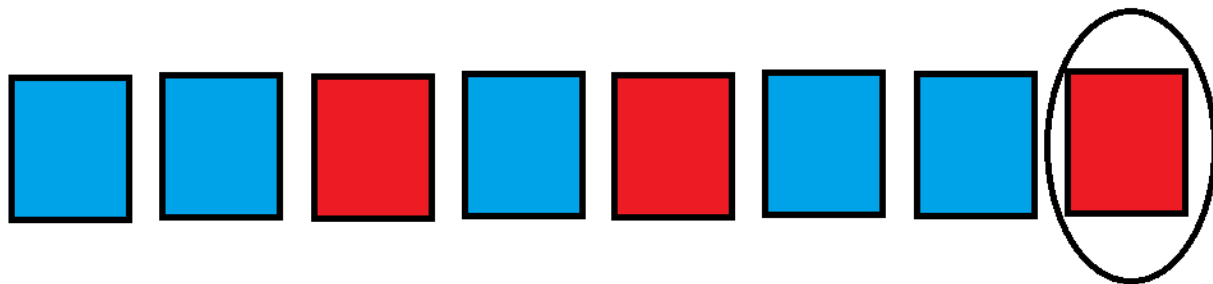
Jak zwykle rozbijemy problem na indykatory. Oznaczmy:

$$X = \text{Liczba rodzin czekająca dłużej od nas}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j\text{-ta rodzina z } n_i \text{ czeka dłużej od nas} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Żeby policzyć $P(X_{ij})$ będziemy rozważać tylko jak są ustawione bagaże naszej rodziny i rodziny, która ma i bagaży (względem siebie).

Tzn. rozpatrujemy tylko sytuacje, gdy mamy $5+i$ bagaży oraz 1 spośród i bagaży wyjedzie ostatni.



W powyższym przykładzie niebieskie kwadraty to nasze walizki, a czerwone to bagaże jakiejś rodziny z n_3

Ostatni bagaż jest ustalony, więc ustawień dla których $X_{3j} = 1$ jest $\binom{7}{2}$, a wszystkich jest $\binom{8}{3}$, stąd $P(X_{3j}) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$

Ogólniej dla każdej rodziny z n_i mamy $P(X_{ij}) = \frac{\binom{5+i-1}{i-1}}{\binom{5+i}{i}}$

Liczymy wartość oczekiwaną jak zawsze:

$$E(X) = E\left(\sum_i \sum_j X_{ij}\right) = \sum_i \sum_j E(X_{ij}) = \sum_{i=1}^4 n_i \cdot \frac{\binom{5+i-1}{i-1}}{\binom{5+i}{i}}$$

Teraz możemy uprościć $\frac{\binom{5+i-1}{i-1}}{\binom{5+i}{i}}$ do $\frac{i}{i+5}$.

Zapisujemy mianownik jako $\frac{i+5}{i} \binom{5+i-1}{i-1}$, dwumian się skróci, więc dostaniemy:

Odpowiedź

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 n_i \cdot \frac{i}{i+5}$$

Zadanie 8 (OSKIBOSKI123)

Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Jakie warunki muszą spełniać a i b , żeby istniała zmienna losowa, która ma wartość oczekiwaną równą a i wariancję równą b ? W przypadku, gdy taka zmienna losowa istnieje, podaj ją.

Rozwiązanie

Oczywistym jest, że wariancja jest nieujemna, co nakłada nam już warunek:

$$b \geq 0$$

Teraz znajdujemy przykład zmiennej losowej dla tylko tego jednego warunku. Niech zmienna losowa X ma rozkład:

$$P(X = a + \sqrt{b}) = \frac{1}{2}, \quad P(X = a - \sqrt{b}) = \frac{1}{2}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

Korzystając z definicji wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum x_i \cdot p_i = \frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{b}) + \frac{1}{2} \cdot (a - \sqrt{b}) \\ &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{b} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{b} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{b})^2 + \frac{1}{2} \cdot (a - \sqrt{b})^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 2a\sqrt{b} + b) + \frac{1}{2} \cdot (a^2 - 2a\sqrt{b} + b) \\ &= \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{b} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{b} + \frac{1}{2}b \\ &= a^2 + b \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$:

$$\text{Var}(X) = (a^2 + b) - a^2 = b$$

Odpowiedź

Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ i $b \geq 0$ istnieje zmienna losowa o podanej wartości oczekiwanej i wariancji.

Zadanie 9 (Michał)

Podaj przykład zmiennej losowej, która ma skończoną wartość oczekiwaną, i nieograniczoną wariancję.

Rozwiązanie

W tym zadaniu chcemy znaleźć zbieżny szereg, który podniesiony do kwadratu jest rozbieżny. Rozważmy następujący eksperyment: Losujemy liczbę ze zbioru liczb naturalnych. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby k jest równe $\frac{C}{k^3}$.

$$P(X = k) = \frac{C}{k^3}$$

C to tak dobrana stała żeby suma prawdopodobieństw wynosiła 1, dokładniej $C \approx 0,83$, ale to nas nie interesuje.

Zdefiniujmy zmienną losową X przyjmującą wartość wylosowanej liczby.

Z definicji wartości oczekiwanej:

$$E[X] = (1 \cdot P(X = 1)) + (2 \cdot P(X = 2)) + (3 \cdot P(X = 3)) + \dots$$

$$E[X] = (1 \cdot \frac{C}{1^3}) + (2 \cdot \frac{C}{2^3}) + (3 \cdot \frac{C}{3^3}) + \dots$$

$$E[X] = C \cdot (\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots)$$

a to z wielce znanego faktu jest skończone. OK.

To teraz wariancja: z definicji $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$. policzmy na początku $E[X^2]$

$$E[X^2] = (1^2 \cdot P(X = 1)) + (2^2 \cdot P(X = 2)) + (3^2 \cdot P(X = 3)) + \dots$$

$$E[X^2] = (1^2 \cdot \frac{C}{1^3}) + (2^2 \cdot \frac{C}{2^3}) + (3^2 \cdot \frac{C}{3^3}) + \dots$$

$$E[X^2] = C \cdot (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$$

co ciekawe znowu otrzymaliśmy znany szereg, tym razem nieskończony. Skoro $E[X^2]$ jest nieskończone, a $E[X]$ skończone, to $E[X^2] - E[X]^2$ (czyli wariancja) jest nieskończona.

Odpowiedź

Jest taki przykład, jak najbardziej, pokazany w rozwiązaniu

Zadanie 10 (Kamil)

Niech X będzie liczbą naturalną wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[1, n]$, a Y liczbą całkowitą wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[-k, k]$. Wyznaczyć $\text{Var}(X)$ oraz $\text{Var}(Y)$.

Rozwiązanie

1. **Wariancja zmiennej X** , gdzie X jest wylosowane jednostajnie z przedziału $[1, n]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &= \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n} \right)^2 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2, \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= \boxed{\frac{n^2 - 1}{12}}.\end{aligned}$$

2. **Wariancja zmiennej Y** , gdzie Y jest wylosowane jednostajnie z przedziału $[-k, k]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{-k + (-k+1) + \dots + (k-1) + k}{2k+1} = 0, \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \frac{(-k)^2 + \dots + k^2}{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^k n^2 \\ &= \frac{2}{2k+1} \sum_{n=1}^k n^2 = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)}{3}, \\ \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \boxed{\frac{k(k+1)}{3}}.\end{aligned}$$

Zadanie 11 (Kuba Sułkowski)

Udowodnij, że jeśli $\text{Var } X = 0$, to istnieje a takie, że $P(X = a) = 1$

Rozwiązanie

Skorzystamy z zadania 4. z pierwszego zestawu - dla ciągu zdarzeń $\{A_n\}$, jeśli $\forall_{i \in \mathbb{N}} P(A_i) = 1$, to $P(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = 1$

Niech $a = E[X]$ (wartość oczekiwana istnieje, bo wariancja istnieje)

Lemat

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| > \varepsilon) = 0$$

Zauważmy:

$$\text{Var } X \geq \varepsilon^2 \cdot P(|X - a| > \varepsilon)$$

Wariancja jest sumą (całą) kwadratów odchyłeń przyjmowanych wartości od wartości oczekiwanej. Uwzględniając tylko te elementy, które nie należą do zbioru $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, dostajemy dolne ograniczenie na wariancję.

Wiedząc że wariancja wynosi 0, to prawdopodobieństwo także musi być zerowe. $\square$

Przekształcając:

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| \leq \varepsilon) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 : P(X \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]) = 1$$

Podstawiając dla $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+} P\left(X \in \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]\right) = 1$$

Teraz korzystając z zadania 1/4:

$$P(X \in \{a\}) = 1 \quad \square$$

Zadanie 12 (Wiktoria Marć)

Czy jeśli dla dwóch zmiennych losowych X, Y mamy $\text{Cov}(X, Y) = 0$ to X, Y są niezależne?

Rozwiązanie

Nie jest tak, można łatwo znaleźć kontrprzykład. Załóżmy, że z równym prawdopodobieństwem losujemy jedną z liczb $\{-1, 0, 1\}$. Wówczas niech X - zmienna losowa oznaczająca wylosowaną liczbę. Zauważmy, że $E[X] = (-1) \cdot P(X = -1) + 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$. Analogicznie $E[X^3] = 0$. Teraz niech zmienna losowa $Y = X^2$ oznacza kwadrat wylosowanej liczby. Wtedy $E[Y] = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 = \frac{2}{3}$. Oczywiście zmienne X i Y nie są niezależne, np. $P(X = 1 \text{ \& } Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{9} = P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$, a mimo to:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - 0 = 0$$

Odpowiedź

Nie

Zadanie 13 (Krzysztof Peszko)

Udowodnij że każdy graf zawiera podgraf dwudzielny, który ma co najmniej połowę krawędzi oryginalnego grafu. Wskazówka: Pamiętaj, że graf dwudzielny to innymi słowy, graf dwukolorowalny.

W następnych zadaniach pomocna może się okazać następująca trywialna obserwacja. Jeśli wartość pewnej zmiennej losowej X wynosi x , to $P(X \geq x) > 0$ (podobnie $P(X \leq x) > 0$)

Rozwiązanie

$E(X)$ - oczekiwana liczba krawędzi.

X_i - i -ta krawędź w grafie dwudzielnym.

Zaczynamy od pokolorowania wierzchołków grafu na 2 kolory z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Dla każdej krawędzi, sprawdzamy wierzchołki, na których się kończy. Jeśli są takie same, to taką krawędź usuwamy z grafu, a jeśli inne to zostawiamy. Prawdopodobieństwo, że zostawiamy, jakąś krawędź to $2 \cdot \frac{1}{4}$, czyli $\frac{1}{2}$. Łatwo, to zauważyć, bo są 2 przypadki, kiedy zostawiamy: pierwszy kolor + drugi oraz drugi + pierwszy. Pozostałe pierwszy + pierwszy i drugi + drugi są złe zgodnie z wcześniejszą definicją.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m E(X_i) = \sum_{i=1}^m P(X_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

Skoro wiemy, że wartość oczekiwana liczby krawędzi to $\frac{m}{2}$ to wiemy, że prawdopodobieństwo istnienia grafu o $\frac{m}{2}$ krawędziach jest większe od zera. To natomaist oznacza, że graf wyjściowy musi mieć podgraf, który jest dwudzielny i ma co najmniej $\frac{m}{2}$ krawędzi.

Zadanie 14 (Stanisław Macura)

Udowodnij, że dla każdego dodatniego n istnieje turniej (graf skierowany pełny) na n wierzchołkach, który ma co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona.

Rozwiązanie

Rozważmy nieskierowany graf pełny na n wierzchołkach. Będziemy kierować wszystkie jego krawędzie z równym prawdopodobieństwem dla dwóch stron. Policzmy wartość oczekiwaną liczby ścieżek Hamiltona dla naszego grafu. Z liniowości wartości oczekiwanej możemy rozbić ją na sumę wartości oczekiwanych indykatorów czy dana permutacja wierzchołków jest ścieżką Hamiltona. Permutacji jest $n!$, dla każdej z nich wartość oczekiwana jest równa prawdopodobieństwu i wynosi $\frac{1}{2^{n-1}}$ (mamy $n - 1$ krawędzi, tylko jedno ze skierowań daje ścieżkę Hamiltona). Po zsumowaniu dostajemy wartość oczekiwaną ścieżek Hamiltona w grafie $\frac{n!}{2^{n-1}}$, z czego na mocy uwagi z zadania 13 wynika, że prawdopodobieństwo tego, że graf ma co najmniej tyle ścieżek Hamiltona jest większe od zera, czyli musi istnieć takie skierowanie które spełnia warunki zadania.

Zadanie 15 (Filip Maniak)

Udowodnij, że każdy graf dwudzielny z m krawędziami zawiera podgraf na co najmniej $\frac{3}{4}m^{\frac{2}{3}}$ krawędziach, który nie zawiera cyklu na czterech wierzchołkach C_4 jako podgrafu.

Uwaga: Wystarczy pokazać ograniczenie $\frac{1}{2}m^{\frac{2}{3}}$.

Wskazówka: Grafy można losować. Jednym ze sposobów jest ustalenie pewnego parametru p i dla każdej pary wierzchołków niezależne wylosowanie tego, czy łączy je krawędź, czy nie, z prawdopodobieństwem p . Jeśli losowany graf nie działa, to może należy go zmodyfikować po wylosowaniu?

Rozwiązanie

Najpierw pokażę lemat:

Lemat: Liczba cykli w grafie dwudzielnym to $\max \frac{|E|^2}{4}$

Dlaczego? Bo par rozłącznych krawędzi jest $\frac{|E|(|E|-1)}{2}$. Zauważmy, że każda para rozłącznych krawędzi występuje razem w max. 1 C_4 . Oszacowanie jeszcze musimy podzielić na 2, bo każdy cykl zliczamy 2 razy.

Główny pomysł

Będziemy losować graf (każdą krawędź z pwdp. p) i zauważymy że liczba cykli jest całkiem mała. W podgrafie naszego grafu dwudzielnego, powstałym w taki sposób że każda krawędź występuje w nim z prawdopodobieństwem p jest w wartości oczekiwanej:

- pm krawędzi (liniowość wartości oczekiwanej)
- $p^4 \text{num_} C_4$ C_4 (wszystkie 4 krawędzie muszą zostać przeniesione)

Zauważmy, że wystarczy usunąć tyle krawędzi co cykli, żeby żadnych cykli nie było. Czyli, stwórzmy nowy sposób losowania grafu: Losujemy każdą krawędź z prawdopodobieństwem p , ale jeśli krawędź ta tworzy C_4 to jej nie bierzemy. Teraz policzmy wartość oczekiwaną:

$$E[E(H)] = pm - p^4 \frac{m^2}{4}$$

Co po podstawieniu $p = m^{-1/3}$ daje:

$$E[E(H)] = \frac{3}{4} m^{\frac{2}{3}}$$

Z trywialnej obserwacjiTM koniec dowodu.