

Zadanie 1 (Wiktoria K)

Udowodnij, że liczba elementów skończonej algebry (czyli też σ -algebry) jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie

(Tak jak w zadaniu 2) Rozważamy atomy w danej σ -algebrze. Niech n - liczba atomów, zgodnie z warunkami jakie musi spełniać σ -algebra suma każdego podzbioru atomów musi należeć do tej algebry. Liczba podzbiorów zbioru n -elementowego to 2^n zatem liczba elementów skończonej σ -algebry musi być potęgą dwójki CKD

Zadanie 2 (Kacper Poneta)

Czy istnieje nieskończona przeliczalna σ -algebra?

Rozwiązanie

Nie istnieje nieskończona przeliczalna σ -algebra. Pokazmy sobie to na atomach. Atom w σ -algebrze to taki zbiór A należący do tej σ -algebry, że dla dowolnego podzbioru $B \subseteq A$ zachodzi $B = \emptyset$ lub $B = A$. Oznacza to, że atom nie może być podzielony na mniejsze zbiory należące do tej samej σ -algebry.

Widzimy że jeśli mamy skończoną liczbę atomów to σ -algebra jest skończona, bo każdy zbiór w σ -algebrze można przedstawić jako sumę atomów. Czyli mamy 2^n podzbiorów dla n atomów.

To teraz założmy że mamy nieskończenie i przeliczalnie wiele atomów. I zastanówmy się ile mamy podzbiorów. No mamy ich $|\mathbb{P}(A)| = 2^A = 2^{\aleph_0}$ ponieważ rozważamy A które jest nieskończone i przeliczalne. A z MFI wiemy że $2^{\aleph_0}$ jest nieprzeliczone bo jest równe na moc continuum.

Odpowiedź

Nie

Zadanie 3 (Patryk Rogalski)

Niech $B \subseteq \Omega$ i niech $\Sigma_B = \{A \subseteq \Omega : B \subseteq A \text{ lub } B \cap A = \emptyset\}$. Udowodnij, że Σ_B jest σ -algebrą.

Rozwiązanie

Przejdźmy kolejno po poszczególnych przypadkach.

1. Zbiór $\emptyset \in \Sigma_B$ ponieważ $B \cap \emptyset = \emptyset$. Zbiór $\Omega \in \Sigma_B$ ponieważ $B \subseteq \Omega$.
2. Weźmy $E \in \Sigma_B$ i zauważmy że jeśli E spełnia warunek, że $E \cap B = \emptyset$ to $B \subseteq \Omega \setminus E$. Jeśli zaś zachodzi, że $B \subseteq E$ to zachodzi $(\Omega \setminus E) \cap B = \emptyset$.
3. Jeżeli $\exists_i$ takie że E_i spełnia warunek $B \subseteq E_i$ to wtedy $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i$ zatem $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_B$. Jeżeli taki zaś nie istnieje to dla każdego i zachodzi $E_i \cap B = \emptyset$ zatem $\bigcup_{i=1}^n E_i \cap B = \emptyset$ czyli $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_B$.
4. analogicznie jak 3 podpunkt bo nie korzystamy tam z tego że suma jest skończona

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 4 (Pavlo Tsikalysyn)

Niech $\Sigma_{\aleph_0}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów Ω , które albo są co najwyżej przeliczalne, albo ich dopełnienia są co najwyżej przeliczalne. Udowodnij, że $\Sigma_{\aleph_0}$ jest σ -algebrą.

Rozwiązanie

Sprawdzamy warunki:

1. $\emptyset, \Omega \in \Sigma_{\aleph_0}$
 $\emptyset$ - jest co najwyżej przeliczalny, z tego mamy $\emptyset \in \Sigma_{\aleph_0}$.
 Dla Ω mamy, że $\Omega/\Omega = \emptyset$ który jest przeliczalny, stąd $\Omega \in \Sigma_{\aleph_0}$.
2. Jeśli $E \in \Sigma_{\aleph_0}$ to $\Omega/E \in \Sigma_{\aleph_0}$
 Z tego, że $E \in \Sigma_{\aleph_0}$ mamy, E - co najwyżej przeliczalny lub Ω/E - co najwyżej przeliczalny.
 - E - co najwyżej przeliczalny, wtedy $\Omega/E \in \Sigma_{\aleph_0}$, bo $\Omega/(\Omega/E) = E$ - co najwyżej przeliczalny.
 - Ω/E - co najwyżej przeliczalny, to $\Omega/E \in \Sigma_{\aleph_0}$, bo Ω/E - co najwyżej przeliczalny.
3. Jeśli $E_1, \dots, E_n \in \Sigma_{\aleph_0}$, to $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$

- Jeśli $\forall_i E_i$ - co najwyżej przeliczalny, to $\bigcup_{i=1}^n E_i$ też co najwyżej przeliczalna, co znaczy, że $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$.
 - Niech E_x nie będzie co najwyżej przeliczalny, to Ω/E_x jest co najwyżej przeliczalny. $\Omega/\bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcap_{i=1}^n \Omega/E_i \subset \Omega/E_x \implies \bigcap_{i=1}^n \Omega/E_i$ co najwyżej przeliczalny, stąd $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$.
4. Jeśli $E_1, \dots, E_\infty \in \Sigma_{\aleph_0}$, to $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$
- Jeśli $\forall_i E_i$ - co najwyżej przeliczalny, to $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ też co najwyżej przeliczalna, co znaczy, że $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$.
 - Niech E_x nie będzie co najwyżej przeliczalny, to Ω/E_x jest co najwyżej przeliczalny. $\Omega/\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \bigcap_{i=1}^\infty \Omega/E_i \subset \Omega/E_x \implies \bigcap_{i=1}^\infty \Omega/E_i$ co najwyżej przeliczalny, stąd $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma_{\aleph_0}$.

□

Zadanie 5 (Kacper Orszulak)

Udowodnij, że jeśli $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in I\}$ jest rodziną σ -algebr na jakimś ustalonym zbiorze Ω (dla dowolnego zbioru indeksów I), to $\bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha$ też jest σ -algebrą.

Rozwiązanie

Niech $\Sigma := \bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha$. Po kolei sprawdzamy warunki.

1. $\emptyset, \Omega \in \Sigma$

$$\forall_{\alpha \in I} \emptyset, \Omega \in \Sigma_\alpha \implies \emptyset, \Omega \in \bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha = \Sigma$$

2. Jeśli $E \in \Sigma$ to $\Omega/E \in \Sigma$

$$\text{Niech } E \in \Sigma. \text{ Wtedy } \forall_{\alpha \in I} E \in \Sigma_\alpha \iff \Omega/E \in \Sigma_\alpha.$$

$$\text{Dostajemy zatem } \Omega/E \in \bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha = \Sigma.$$

3. Jeśli $E_1, \dots, E_n \in \Sigma$, to $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma$

$$\text{Niech } E_1, \dots, E_n \in \Sigma. \text{ Wtedy } \forall_{\alpha \in I} E_1, \dots, E_n \in \Sigma_\alpha \implies \bigcup_{i=1}^n E_i \in \Sigma_\alpha.$$

$$\text{Dostajemy zatem } \bigcup_{i=1}^n E_i \in \bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha = \Sigma.$$

4. Jeśli $E_1, E_2, \dots \in \Sigma$, to $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma$

$$\text{Niech } E_1, E_2, \dots \in \Sigma. \text{ Wtedy } \forall_{\alpha \in I} E_1, E_2, \dots \in \Sigma_\alpha \implies \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma_\alpha.$$

$$\text{Dostajemy zatem } \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha = \Sigma.$$

□

Zadanie 6 (Mateusz Wojaczek)

Udowodnij, że każdy zbiór otwarty $B \subseteq \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalną sumą przedziałów otwartych. Dodatkowo pokaż, że $\mathcal{A}_0$ jest zamknięty na branie dowolnych sum (także nieskończonych).

Rozwiązanie

Niech $B \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Z definicji zbioru otwartego:

$$\forall x \in B \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ takie, że } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq B.$$

Z MFI wiadomo, że w każdym przedziale otwartym $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ istnieje liczba wymierna. Liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele. $\mathbb{Q}$ jest przeliczalne.

Dla każdej liczby wymiernej $q \in \mathbb{Q}$ zdefiniujmy:

$$B_q = \{x \in B \mid q \in (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \text{ dla pewnego } \varepsilon_x > 0\}.$$

Wtedy każdy punkt $x \in B$ należy do jakiegoś B_q , ponieważ w przedziale $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq B$ znajduje się liczba wymierna q . Zatem:

$$B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} B_q.$$

Każdy B_q jest sumą przedziałów otwartych zawierających q , a ponieważ $\mathbb{Q}$ jest przeliczalne, B jest sumą przeliczalną przedziałów otwartych.

Dowód zamknięcia $\mathcal{A}_0$ na dowolne sumy:

Niech $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}_0$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych. Rozważmy sumę:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Niech $x \in U$. Wówczas istnieje $i_0 \in I$ takie, że $x \in U_{i_0}$. Ponieważ U_{i_0} jest otwarty, istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Zatem każdy punkt $x \in U$ należy do pewnego przedziału zawartego w U , co pokazuje, że U jest otwarty.

Zatem $U \in \mathcal{A}_0$, co dowodzi, że $\mathcal{A}_0$ jest zamknięty na dowolne sumy (w tym nieskończone).

Odpowiedź

CKD

Zadanie 7 (Olek Wieczorek)

Udowodnij, że A_0 nie jest zamknięty na branie nieskończonych przecięć.

Rozwiązanie

Zbiór zamknięty na branie przecięć to taki, że dla każdego podzbioru elementów tego zbioru ich przecięcie również należy do tego zbioru.

Żeby dostać tezę wystarczy pokazać, że istnieje nieskończony podzbiór przedziałów otwartych, których przecięcie to przedział, który jest domknięty z którejś strony.

Możemy wziąć np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} = [0, 0] \notin A_0$$

Zbiór A_0 nie jest zamknięty na przecięcia, bo dostaliśmy element spoza niego. jeśli chcemy wziąć zbiór inny niż singleton możemy wziąć np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1] \notin A_0$$

Zadanie 8 (Krzysztof Peszko)

Niech $A_{\infty} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ i niech $U \in A_0$. Udowodnij, że każda σ -algebra zawierająca A_{∞} zawiera U . Innymi słowy pokazujemy, że $A_0 \subseteq \sigma(A_{\infty})$, a co za tym idzie $\sigma(A_0) \subseteq \sigma(A_{\infty})$. Podobnie pokaż, że $\sigma(A_0) \supseteq \sigma(A_{\infty})$.

Rozwiązanie

Pokażemy, że element zbioru otwarty (element A_0), może być generowany przez elementy z A_{∞} .

Zacznijmy od obserwacji, że ponieważ każdy zbiór otwarty jest sumą przeliczalnej liczby przedziałów otwartych, więc wystarczy nam pokazać, że dowolny przedział (a, b) może być generowany przez A_{∞} .

Weźmy nieskończoną rodzinę B , gdzie B_n to $(-\infty, b - \frac{1}{n}]$. Nieskończoną sumą tej rodziny. $U_B = (-\infty, b)$. Teraz weźmy dopełnienie i otrzymamy: $[b, +\infty)$. Następnie możemy to szumować z $(-\infty, a]$ i na koniec wziąć dopełnienie tego. Otrzymany wynik to (a, b) . To natomiast oznacza, że A_{∞} generuje każdy przedział.

Żeby pokazać zawieranie w drugą stronę wystarczy wziąć dopełnienie od przedziału otwartego $(a, +\infty)$, co daje $(-\infty, b]$.

Z tych faktów wychodzi, że $\sigma(A_0) = \sigma(A_{\infty})$.

Zadanie 9 (Stanisław Macura)

Niech $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \{0, 1\}$ będzie zdefiniowana następująco. Dla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy $\nu(B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $(0, \varepsilon) \subseteq B$. Czy funkcja ν jest skończenie addytywna? Jeśli tak, to czy jest przeliczalnie addytywna?

Rozwiązanie

Niech $E_1 = \mathbb{Q} \cap (0, 1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $E_2 = (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\nu(E_1) = \nu(E_2) = 0$, a $\nu(E_1 \cup E_2) = \nu((0, 1)) = 1 \neq \nu(E_1) + \nu(E_2) = 0$.

Odpowiedź

Nie jest skończenie addytywna

Zadanie 10 (Filip Maniak)

Niech (Ω, Σ) i (Ω', Σ') będą przestrzeniami mierzalnymi oraz $\sigma(\mathcal{G}) = \Sigma'$ dla pewnego $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ (innymi słowy Σ' jest generowana przez $\mathcal{G}$). Udowodnij, że $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(G) \in \Sigma$ dla każdego $G \in \mathcal{G}$.

Rozwiązanie

Sprawdza się to, do udowodnienia że:

$$f^{-1}(G) \in \Sigma \iff f^{-1}(\sigma(G)) \in \Sigma$$

$\Leftarrow$

Triv, bo $G \subset \sigma(G)$

$\Rightarrow$

Tu plan jest taki, że pokażemy że wszystkie zbiory o mierzalnym przeciwobrazie są σ -algebrą (oznaczymy ją M jak mierzalne). Wiemy jednak, że G należy do tej sigma algebry, a to oznacza że $\sigma(G) \subset M$ bo $\sigma(G)$ to przecięcie M z czymś tam (nie interesuje nas czym). No to teraz ta trudniejsza część, pokazanie tego

Dowód że $\{X : f^{-1}(X) \in \Sigma\} = M$ jest σ -algebrą

Sprawdzamy własności:

- $\Omega' \in M$, tak ponieważ $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \Sigma$
- $A \in M \implies \Omega'/A \in M$ też, ponieważ $f^{-1}(\Omega'/A) = f^{-1}(\Omega')/f^{-1}(A)$ co już jest w M bo Σ to algebra

- Suma przeciwobrazów podobnie się przenosi, więc ten sam argument.
- Suma przeliczalnej ilości zachowuje się trywialnie tak samo.

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 11 (Jakub Stepaniuk)

Czy złożenie dwóch funkcji mierzalnych jest mierzalne?

Rozwiązanie

Niech dane będą (Ω_1, Σ_1) , (Ω_2, Σ_2) , (Ω_3, Σ_3) oraz funkcje $f : (\Omega_1, \Sigma_1) \rightarrow (\Omega_2, \Sigma_2)$, $g : (\Omega_2, \Sigma_2) \rightarrow (\Omega_3, \Sigma_3)$, które są mierzalne.

Dla przypomnienia, funkcja $h : (\Omega, \Sigma) \rightarrow (\Omega', \Sigma')$ jest mierzalna wtw. gdy $\forall E \in \Sigma' h^{-1}(E) \in \Sigma$.

Niech więc $E \in \Sigma_3$. Z mierzalności g wiadomo, że $g^{-1}(E) \in \Sigma_2$. Z tego i z mierzalności f wiadomo też, że $f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \Sigma_1$.

Pokazaliśmy, że dla każdego $E \in \Sigma_3$ zachodzi $(g \circ f)^{-1}(E) \in \Sigma_1$, przez co $(g \circ f)$ jest mierzalna.

Odpowiedź

Tak, złożenie dwóch funkcji mierzalnych jest mierzalne.

Zadanie 12 (Wiktoria Marć)

Czy każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna?

Rozwiązanie

Tak, pokażemy, że każda taka funkcja jest $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mierzalna. Niech $\mathcal{A}_0$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$. Wiemy, że $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Na podstawie definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji f mamy

$$\forall A \in \mathcal{A}_0 \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0,$$

czyli przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest również zbiorem otwartym.

Teraz wykorzystamy zadanie 10 z zestawu 3. Podstawiając tam:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}; \Sigma_1 = \Sigma_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}); \mathcal{G} = \mathcal{A}_0$$

otrzymujemy, że f jest mierzalna.

Odpowiedź

Tak, w ujęciu borelowskim

Zadanie 13 (OSKIBOSKI123)

Teza: Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą mierzalne. Czy ich suma również jest mierzalna?

Rozwiązanie

Niech $\mathcal{G} = \{(-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\}$. Wiadomo, że $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (co łatwo wynika z warunków na σ -algebrę oraz faktu, że $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

Zgodnie z zadaniem 10, aby wykazać mierzalność $f + g$, wystarczy sprawdzić, że dla każdego $G \in \mathcal{G}$:

$$(f + g)^{-1}(G) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Weźmy dowolne $c \in \mathbb{R}$ i rozważmy zbiór:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) + g(x) < c\} = (f + g)^{-1}((-\infty, c)).$$

Zauważmy, że:

$$f(x) + g(x) < c \iff f(x) < c - g(x).$$

Istnieje wtedy liczba wymierna $r \in \mathbb{Q}$ taka, że:

$$f(x) < r < c - g(x).$$

Zatem:

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < c - r\}).$$

Ponieważ f i g są mierzalne, zbiory:

$$\{x : f(x) < r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \{x : g(x) < c - r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Przekrój dwóch zbiorów borelowskich jest borelowski, a przeliczalna suma zbiorów borelowskich jest borelowska. Zatem $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Wnioskujemy, że $(f + g)^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$, czyli warunek mierzalności jest spełniony na generatorze $\mathcal{G}$. Z zadania 10 wynika, że $f + g$ jest mierzalna.

Odpowiedź

Suma też jest mierzalna.

Zadanie 14 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 15 (Kamil)

Udowodnij, że jeśli $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ są mierzalne, to

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Wskazówka:

Najpierw udowodnij równość dla f i g będących funkcjami schodkowymi. Następnie skorzystaj z twierdzenia o aproksymacji funkcji mierzalnej funkcjami schodkowymi. Przejście od funkcji nieujemnych do funkcji rzeczywistych i zespolonych jest bardzo proste.

Rozwiązanie

Etap 1: Liniowość całki dla funkcji schodkowych

Niech $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami schodkowymi, tzn.

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j},$$

gdzie $A_i, B_j \subseteq \Omega$ są mierzalnymi i rozłącznymi zbiorami w obrębie Ω , a $a_i, b_j \in \mathbb{C}$.

Wiemy, że

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Ponieważ $f(x) = a_i$ dla $x \in A_i$, a $g(x) = b_j$ dla $x \in B_j$, otrzymujemy:

$$(f + g)(x) = a_i + b_j \quad \text{dla } x \in A_i \cap B_j.$$

Zatem funkcja $f + g$ jest również schodkowa i można ją zapisać jako

$$f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Z definicji całki dla funkcji schodkowej mamy:

$$\int_E (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(E \cap A_i \cap B_j).$$

Rozdzielając sumę i korzystając z własności sum:

$$\int_E (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(E \cap A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap A_i \cap B_j).$$

Korzystając z rozłączności zbiorów B_j i A_i , otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^m \mu(E \cap A_i \cap B_j) = \mu(E \cap A_i), \quad \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i \cap B_j) = \mu(E \cap B_j),$$

czyli

$$\int_E (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E \cap A_i) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j).$$

Z definicji całki funkcji schodkowej mamy wprost:

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E \cap A_i), \quad \int_E g d\mu = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j),$$

więc wreszcie:

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Etap 2: Liniowość całki dla funkcji mierzalnych nieujemnych

Z twierdzenia o aproksymacji funkcji mierzalnej funkcjami schodkowymi, weźmy $S_1, \dots, S_n$ i $T_1, \dots, T_n$ takie, żeby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = g.$$

Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) = f + g.$$

Z liniowości całki dla funkcji schodkowych otrzymujemy dla funkcji nieujemnych mierzalnych:

$$\int_E (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (S_n + T_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E T_n d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Etap 3: Liniowość całki dla funkcji rzeczywistych

Rozbijmy

$$f = f_+ - f_-, \quad g = g_+ - g_-,$$

gdzie

$$f_+ = \max\{0, f\}, \quad f_- = -\min\{0, f\},$$

analogicznie dla funkcji g .

Jako że f_+, f_-, g_+, g_- są funkcjami mierzalnymi, nieujemnymi, zastosujemy w dowodzie wynik z Etapu 2:

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_E (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) d\mu \\ &= \int_E (f_+ + g_+) - (f_- + g_-) d\mu \\ &= \int_E (f_+ + g_+) d\mu - \int_E (f_- + g_-) d\mu \\ &= \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu - \int_E f_- d\mu - \int_E g_- d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

Etap 4: Liniowość całki dla funkcji zespolonych

Niech $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami mierzalnymi. Rozbijamy je na części rzeczywistą i urojoną:

$$f = \Re(f) + i\Im(f), \quad g = \Re(g) + i\Im(g),$$

gdzie $\Re(f), \Im(f), \Re(g), \Im(g)$ są funkcjami rzeczywistymi mierzalnymi.

Zastosowując liniowość całki dla funkcji rzeczywistych (Etap 3), mamy:

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E ((\Re(f) + \Re(g)) + i(\Im(f) + \Im(g))) d\mu.$$

Rozdzielamy całkę na część rzeczywistą i urojoną:

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E (\Re(f) + \Re(g)) d\mu + i \int_E (\Im(f) + \Im(g)) d\mu.$$

Korzystając z liniowości całki dla funkcji rzeczywistych:

$$\int_E (\Re(f) + \Re(g)) d\mu = \int_E \Re(f) d\mu + \int_E \Re(g) d\mu, \quad \int_E (\Im(f) + \Im(g)) d\mu = \int_E \Im(f) d\mu + \int_E \Im(g) d\mu.$$

Łącząc części rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy:

$$\int_E (f + g) d\mu = (\int_E \Re(f) d\mu + i \int_E \Im(f) d\mu) + (\int_E \Re(g) d\mu + i \int_E \Im(g) d\mu) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Zatem liniowość całki zachodzi również dla funkcji zespolonych.

Zadanie 16 (Jakub Sułkowski)

Niech h będzie mierzalną funkcją nieujemną na Ω . Udowodnij, że jeśli $\int_E h \, d\mu = 0$, to $\mu(\{x \in E \mid h(x) \neq 0\}) = 0$ (mówimy wtedy, że $h|_E = 0$ μ -prawie wszędzie)

Rozwiązanie

Parafrazując: wszystko jest nieujemne i sumuje się do zera, więc (prawie) wszystko jest zerem.

Zdefiniujmy $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \max\{2^a \mid a \in \mathbb{Z}, 2^a \leq x\}, & x > 0 \end{cases}$$

Teraz zdefiniujmy $f = g \circ h$. Przyglądając się dostatecznie długo mamy, że f jest mierzalne.

Oczywiście $f \leq h$ (bo $g \leq id$), oraz $\forall_x f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Korzystając ze schodkowej definicji f , niech

$$S_a = \{x \in E \mid h(x) \in [2^a, 2^{a+1})\} = \{x \in E \mid f(x) = 2^a\}$$

oraz niech $\tilde{S} = \{x \mid f(x) = h(x) = 0\}$. Wtedy:

$$0 = \int_E h \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu = 0 \cdot \mu(\tilde{S}) + \sum_{a \in \mathbb{Z}} 2^a \mu(S_a) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} 2^a \mu(S_a)$$

(łatwo jest wprowadzić na $\mathbb{Z}$ dobry porządek podobny do ω , więc akceptujemy iterowanie sumy po elementach $\mathbb{Z}$)

Aby suma liczb nieujemnych była zerowa, musi to być sumą samych zer. $\forall_a \mu(S_a) = 0$

Wracając do tezy:

$$\mu(\{x \in E \mid h(x) \neq 0\}) = \mu(\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}} S_a\right) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \mu(S_a) = 0$$

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz