Zadanie 1 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

$\boxed{\text{tutaj daj odpowiedz}}$

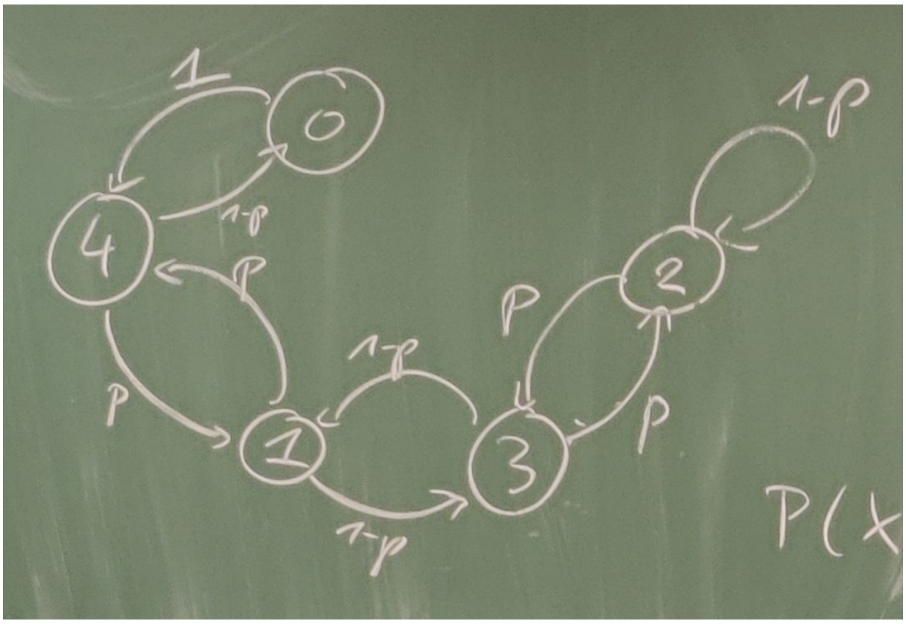
Zadanie 2 (Hubert Jastrzębski)

Poruszasz się między domem a biurem. Pewnego razu kupiłeś cztery parasole, które położyłeś w domu przy wejściu. Przyjmijmy następnie, że każdego dnia (zaczynając od Dnia 0) wychodzisz rano z domu do biura i po południu wychodzisz z biura do domu. Przed każdym takim wyjściem: jeśli w danym momencie pada deszcz i jeśli masz jeden z parasoli w swojej lokalizacji, to bierzesz parasol, chronisz się przed deszczem i odkładasz parasol w docelowej lokalizacji.

Załóżmy, że w każdym momencie prawdopodobieństwo tego, że pada wynosi p. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech X_{2n} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w domu w Dniu n-tym rano przed Twoim wyjściem i niech X_{2n+1} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w biurze w Dniu n-tym w czasie Twojej pracy.

1. Czy $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa?
2. Jeśli odpowiedział-aś/-eś na (i) tak, to czy ten łańcuch ma rozkład stacjonarny? Jeśli tak, to oblicz ten rozkład.
3. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech A_n będzie zdarzeniem, że n-tego dnia zmokł-aś/-eś: to jest wychodząc z domu lub później wychodząc z pracy padał deszcz, a Ty nie miał-aś/-eś parasola. Oblicz $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
4. Jeśli mieszkasz w Szkocji, gdzie $p = 0.6$, ile potrzebujesz kupić parasoli na starcie, aby $\lim_{n\to\infty} P(A_n) < 0.1$?

Rozwiązanie



Podpunkt 1. Jak widać, jest to łańcuch Markowa. Koniec.

A trochę dokładniejsze wytłumaczenie:

Każdy z tych wierzchołków $(0), (1), (2), (3), (4)$ to liczba parasoli, które są w naszej lokalizacji. Czyli zaczynamy od stanu (4) i jeśli nie pada deszcz, to nie bierzemy parasola i idziemy do biura w którym jest $4 - 4 = 0$ parasoli (stan (0)). Jeśli natomiast pada deszcz, to bierzemy parasol i idziemy do biura w którym jest $4 - 4 + 1 = 1$ parasol (stan (1)). Analogicznie dla innych stanów; jeśli jesteśmy w (k) i pada, to bierzemy parasol i zwiększamy liczbę w tej drugiej lokazliacji (gdzie jest $4 - k + 1$ parasoli), a jeśli nie pada to nie bierzemy i jest $4 - k$ parasoli.

Dany stan zależy tylko od poprzedniego, bo nie obchodzi nas, czy jesteśmy w domu, czy w biurze, tylko to ile mamy koło siebie parasoli.

Podpunkt 2. Ma rozkład stacjonarny. Możemy to policzyć na dwa sposoby:

Sposób 1.

Aby znaleźć rozkład stacjonarny, musimy rozwiązać równanie $\pi P = \pi$, gdzie P to macierz przejścia, a $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ to wektor rozkładu stacjonarnego.

Macierz przejścia P jest następująca:

$$P = \begin{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1-p & p \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tak więc mnożymy wektor π przez macierz P i przyrównujemy do π:

$$\begin{cases} \pi_4(1-p) = \pi_0 & (1) \\ \pi_3(1-p) + \pi_4 p = \pi_1 & (2) \\ \pi_2(1-p) + \pi_3 p = \pi_2 & (3) \\ \pi_1(1-p) + \pi_2 p = \pi_3 & (4) \\ \pi_0 + \pi_1 p = \pi_4 & (5) \\ \sum_{k=0}^{4} \pi_k = 1 & (6) \end{cases}$$

Z równania (3) otrzymujemy $\pi_2(1 - (1-p)) = \pi_3 p \implies \pi_2 = \pi_3$. Podstawiając to do (4) mamy $\pi_1(1-p) + \pi_2 p = \pi_2 \implies \pi_1 = \pi_2$. Następnie z (2), wiedząc że $\pi_3 = \pi_1$, mamy $\pi_1(1-p) + \pi_4 p = \pi_1 \implies \pi_4 = \pi_1$.

Mamy więc równość stanów: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4$. Z równania (1) wyznaczamy π_0: $\pi_0 = (1-p)\pi_4$.

Podstawiamy do warunku sumowania (6):

$$(1-p)\pi_4 + 4\pi_4 = 1 \implies \pi_4(1-p+4) = 1 \implies \pi_4 = \frac{1}{5-p}$$

Ostatecznie:

$$\pi_0 = \frac{1-p}{5-p}, \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{5-p}$$

Sposób 2. (ten nieszczęsny)

Skorzystamy z Global balance equation.

Dla dowolnego podzbioru stanów $X \subset S$:

$$\underbrace{\sum_{x \in X} \left(\pi_x \sum_{y \notin X} p_{xy} \right)}_{\text{Wypływ z } X} = \underbrace{\sum_{y \notin X} \left(\pi_y \sum_{x \in X} p_{yx} \right)}_{\text{Wpływ do } X}$$

$$\iff \pi \text{ jest rozkładem stacjonarnym}$$

Zauważmy jednak, że nie musimy sprawdzać wszystkich podzbiorów S. Jeśli sprawdzimy tylko singletony, to wystarczy, ponieważ dla dowolnego podzbioru X możemy rozbić sumę na sumy po singletonach.

Jeszcze tylko przypomnijmy, że p_{xy} to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y (nie pamiętam, czy na wykładzie było tak, czy na odwrót?).

Sprawdzamy więc dla każdego stanu: Sprawdzamy więc bilans przepływu (wychodzące poza stan = wchodzące spoza stanu) dla każdego stanu:

1. Dla $X = \{0\}$: $\pi_0 \cdot (1) = \pi_4 \cdot (1 - p)$
2. Dla $X = \{1\}$: $\pi_1 \cdot (1) = \pi_3 \cdot (1 - p) + \pi_4 \cdot p$
3. Dla $X = \{2\}$: $\pi_2 \cdot p = \pi_3 \cdot p \quad$ (nie liczymy po żadnej stronie $2 \to 2$!)
4. Dla $X = \{3\}$: $\pi_3 \cdot (1) = \pi_1 \cdot (1 - p) + \pi_2 \cdot p$
5. Dla $X = \{4\}$: $\pi_4 \cdot (1) = \pi_0 \cdot (1) + \pi_1 \cdot p$

Podobnie jak w Sposobie 1, rozwiązując te równania wraz z warunkiem sumowania, otrzymujemy ten sam rozkład stacjonarny.

Podpunkt 3. Zdarzenie A_n zachodzi, gdy pada deszcz i nie mamy parasola w domu lub w biurze.

Trzeba pamiętać, że dzień składa się z dwóch wyjść: z domu do biura i z biura do domu!

Czyli $A_n = \{(X_{2n} = 0 \land \text{ pada }) \lor (X_{2n+1} = 0 \land \text{ pada })\}$

Zauważmy też, że te zdarzenia są rozłączne. Jest tak, ponieważ liczba parasoli w domu i w biurze sumuje się do 4, więc jeśli zmoknę rano, to nie zmoknę po południu nawet jak będzie padać deszcz. Zatem:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(X_{2n} = 0 \land \text{ pada}) + P(X_{2n+1} = 0 \land \text{ pada}) \\ &= p \cdot \pi_0 + p \cdot \pi_0 = 2p\pi_0 \text{ , dla n } \to \infty \end{aligned}$$

Czemu $p \cdot \pi_0$? Bo liczymy granicę, a po długim czasie zawsze rozkład zbliża się do rozkładu stacjonarnego. Natomiast w stanie stacjonarnym $P(X_n = k) = \pi_k$ dla każdego n.

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 2 \cdot (p \cdot \pi_0) = \frac{2p(1-p)}{5-p}$$

Podpunkt 4.

Uogólniamy wzór na π dla N parasoli.

Zauważmy, że do stanu (0) możemy przejść tylko ze stanu (N) gdy nie pada, tak więc

$$\pi_0 = (1-p)\pi_N$$

Możemy udowodnić też, że dla takiego π_0 oraz $\pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_N = x$, π jest rozkładem stacjonarnym. Wystarczy skorzystać z global balance equation dla singletonów, podobnie jak w Podpunkcie 2:

Dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ rozważamy stan $X = \{k\}$:

$$\pi_k = \pi_{N-k} \cdot (1-p) + \pi_{N-k+1} \cdot p$$

$$x = x \cdot (1-p) + x \cdot p$$

$$x = x \text{ co jest prawdziwe}$$

Tak więc dla każdego k od 1 do $N-1$ równanie jest spełnione. Dla $k = 0$ mamy już udowodnione, a dla $k = N$ rozważamy stan $X = \{N\}$:

$$\pi_N = \pi_0 + \pi_1 \cdot p$$

$$x = (1-p)x + x \cdot p$$

$$x = x \text{ co jest prawdziwe}$$

Tak więc jest to rzeczywiście poprawny rozkład stacjonarny. Wiemy, że sumuje się do 1, więc możemy wyznaczyć x:

$$(1-p)x + N \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{N+1-p}$$

Dzięki temu możemy policzyć ogólny wzór na prawdopodobieństwo zmoknięcia w ciągu dnia:

$$P(A_n) = \frac{2p(1-p)}{N+1-p}$$

Dla Szkocji ($p = 0.6$) szukamy N, aby wynik był < 0.1:

$$\frac{2 \cdot 0.6 \cdot 0.4}{N+0.4} < 0.1$$

$$\frac{0.48}{N+0.4} < 0.1 \quad \Big| \cdot 10(N+0.4)$$

$$4.8 < N + 0.4$$

$$N > 4.4$$

Najmniejszą liczbą naturalną jest $N = 5$.

Odpowiedź

(1)	Tak, jest to łańcuch Markowa.
(2)	Tak; $\pi = \left(\frac{1-p}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p}\right)$
(3)	$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \frac{2p(1-p)}{5-p}$
(4)	5 parasoli

Zadanie 3 Patryk

Udowodnij, że jeżeli jeden ze stanów w danej klasie relacji skomunikowania jest stanem powracającym, to wszystkie stany w tej klasie są powracające.

Rozwiązanie

Tak naprawdę cała intuicja jest taka że, skoro rozpatrujemy daną klasę skomunikowania to zachodzi: $\forall_{i,j} i \leftarrow j$ oraz $j \leftarrow i$. Załóżmy że wiemy, że stanem powracającym jest i. Teraz skoro to jest klasa skomunikowania to jak weźmiemy jakiś stan x to zachodzi $i \leftarrow x$, ale ze względu na klasę skomunikowania zachodzi również $x \leftarrow i$. Zatem zauważmy że skoro istnieje ścieżka z i do i przez x oraz i jest powracający to x też jest powracający.
Bardziej formalnie:

Jeśli i i j są w tej samej klasie komunikacji i stan i jest powracający, to stan j również jest powracający.

Ponieważ $i \leftrightarrow j$, istnieją liczby całkowite $n_0, m_0 \geq 1$ takie, że

$$p_{ji}(n_0) > 0 \qquad \text{oraz} \qquad p_{ij}(m_0) > 0.$$

Założenie, że stan i jest powracający oznacza, że

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(r) = +\infty.$$

Dla każdego $r \geq 0$ zachodzi

$$p_{jj}(n_0 + r + m_0) \;\geq\; p_{ji}(n_0)\, p_{ii}(r)\, p_{ij}(m_0).$$

Sumując obie strony po wszystkich $r \geq 0$ otrzymujemy

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_{jj}(t) \;\geq\; p_{ji}(n_0)\, p_{ij}(m_0) \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(r).$$

Ponieważ $p_{ji}(n_0) > 0$, $p_{ij}(m_0) > 0$ oraz $\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}(r) = +\infty$, prawa strona sumy jest równa $+\infty$. Zatem

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_{jj}(t) = +\infty,$$

co oznacza, że stan j jest powracający.

Wynika stąd, że każdy stan w klasie komunikacji, która zawiera stan powracający, również jest powracający.

Odpowiedź

$$\boxed{\text{tutaj daj odpowiedz}}$$

Zadanie 4 (Michal)

Udowodnij, że wskończonym łańcuchu Markova każdu stan powracający jest dodatni.

Dowód

Niech S będzie przestrzenią stanów łańcucha Markowa, przy czym $|S| < \infty$ (przestrzeń jest skończona). Rozważmy stan powracający $i \in S$. Niech C będzie klasą komunikacji, do której należy stan i.

Z własności łańcuchów Markowa wiemy, że:

1. Klasa C jest zamknięta (prawdopodobieństwo wyjścia z niej wynosi 0).
2. Wszystkie stany w klasie C są powracające.
3. Ponieważ cała przestrzeń S jest skończona, to $C \subseteq S$ również jest zbiorem skończonym.

Przeprowadzimy dowód nie wprost.
Załóżmy przeciwnie, że stan i (a zatem i wszystkie stany w klasie C) jest powracający zerowy.

Z definicji stanu powracającego zerowego wynika, że granica prawdopodobieństw przejścia dąży do zera, czyli dla każdego $j \in C$:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$$

gdzie $P_{ij}^{(n)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w n krokach.

Ponieważ klasa C jest zamknięta, w każdym kroku n suma prawdopodobieństw przejścia ze stanu i do wszystkich stanów tej klasy musi wynosić 1:

$$\sum_{j\in C} P_{ij}^{(n)} = 1$$

Obłóżmy to granicą:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} P_{ij}^{(n)} = 1$$

Ponieważ zbiór C jest skończony, możemy zamienić kolejność sumowania i granicy (kluczowe)

$$\sum_{j\in C} \left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}\right) = 1$$

Korzystając z naszego założenia podstawiamy 0 w miejsce granicy:

$$\sum_{j\in C} 0 = 1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność Zatem, stan i musi być powracający dodatni. $\square$

Zadanie 5 (Filip Manijak)

Rozważmy dowolny (skończony lub nieskończony) łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ w którym wszystkie stany są w tej samej klasie skomunikowania. Udowodnij, że jeżeli jeden ze stanów jest powracający dodatni, to wszystkie stany są powracające dodatnie.

Rozwiązanie

Oznaczmy x jako stan, który jest powracający dodatni. Wtedy zauważmy, że dla każdego innego stanu y:

$$E[T_{y,y}] \leq E[T_{y,x}] + \sum T_{x,x} * k * (1-p_{y,x})^{k-1} p_{y,x} + E[x \to y] = E[T_{y,x}] + T_{x,x}(1/p_{x,y}) + E[x \to y]$$

Ten wzór to wartość oczekiwana rozkładu geometrycznego. C to taka liczba, żeby $p_{x,y} > 0$. Czyli twierdzę, że wartość oczekiwana kroków do powrotu jest mniejsza niż suma wartości oczekiwanych: Dojścia do stanu powracającego (to musi byś skończone, bo prawdopodobieństwo przejścia od x do y jest niezerowe), Wracania do stanu powracającego, tak długo aż nie wylosujemy powrotu do naszego punktu i powrotu do tego punktu. Jak widac prawa strona jest skończona.

Zadanie 6 (Mateusz Wojaczek)

Udowodnij, że dla dowolnego skończonego nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieją stałe $c > 0$, $0 < \delta < 1$ takie, że dla każdego stanu z i dla każdego $m \in \mathbb{N}_1$ mamy:

$$\mathbb{P}(T_z > m) \leq c\,\delta^m.$$

Rozwiązanie

Udowodnij, że dla dowolnego skończonego nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieją stałe $c > 0$, $0 < \delta < 1$ takie, że dla każdego stanu z i dla każdego $m \in \mathbb{N}_1$ mamy:

$$\mathbb{P}(T_z > m) \leq c\,\delta^m.$$

Dowód. Z nieprzywiedlności i nieokresowości (korzystam z tego założenia bo Krystian pozwolił) łańcucha Markowa otrzymujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$\forall n \geq N, \quad \forall x, y \quad P_{x,y}(n) > 0.$$

W szczególności:

$$0 < a := \min_{x,y} P_{x,y}(N).$$

Rozważmy teraz:

$$\mathbb{P}(T_z > m) = \mathbb{P}(X_0 \neq z, X_1 \neq z, \ldots, X_m \neq z) \leq \mathbb{P}(X_0 \neq z, X_N \neq z, X_{2N} \neq z, \ldots, X_{\lfloor m/N \rfloor N} \neq z).$$

A zatem:

$$\mathbb{P}(T_z > m) \leq (1-a)^{\lfloor m/N \rfloor} \leq (1-a)^{\frac{m}{N}-1} = \frac{1}{1-a}\left((1-a)^{1/N}\right)^m.$$

Zatem otrzymujemy dokładnie poszukiwaną postać:

$$\mathbb{P}(T_z > m) \leq c\,\delta^m,$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{1-a}, \qquad \delta = (1-a)^{1/N}.$$

Odpowiedź

$$\boxed{\text{tutaj daj odpowiedz}}$$

Zadanie 7 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

$$\boxed{\text{tutaj daj odpowiedz}}$$

Zadanie 8 (OSBKIBOSKI123)

Udowodnij, że jeżeli x jest stanem istotnym i y jest osiągalny z x, to y jest stanem istotnym.

Rozwiązanie

Definicje. Z definicji nieistotności mamy:

$$\text{nieistotny}(i) \;:=\; \exists j : (i \to j) \wedge (j \not\to i),$$

zatem:

$$\text{istotny}(i) \;\equiv\; \forall j : \Big[(i \not\to j) \;\vee\; (j \to i)\Big].$$

Założenia.

- x istotny: $\forall z \, \Big[(x \not\to z) \;\vee\; (z \to x)\Big]$
- $x \to y$

Teza. y istotny: $\forall w \, \Big[(y \not\to w) \;\vee\; (w \to y)\Big]$.

Dowód. Weźmy dowolny stan w.

<u>Przypadek 1:</u> $y \not\to w$.
Wtedy $(y \not\to w) \vee (w \to y)$ jest prawdziwe.

<u>Przypadek 2:</u> $y \to w$.
Z $x \to y$ i $y \to w$ wynika $x \to w$.
Z istotności x dla w mamy: $(x \not\to w) \vee (w \to x)$.
Skoro $x \to w$, to $(x \not\to w)$ jest fałszem, więc musi zachodzić $w \to x$.

Mamy $w \to x$ oraz $x \to y$, stąd $w \to y$.
Zatem $(w \to y)$ jest prawdą, więc alternatywa $(y \not\to w) \vee (w \to y)$ również.

W obu przypadkach formuła jest spełniona dla każdego w, co oznacza, że y jest istotny. $\square$

Zadanie 9 (Stanisław Macura)

Udowodnij, że w każdym skończonym łańcuchu Markowa istnieje przynajmniej jedna klasa komunikacji, w której wszystkie stany są istotne.

Rozwiązanie

Popatrzmy sobie na skierowany graf przejść między stanami. Wiemy, że klasy komunikacji są silie spójnymi składowymi tego grafu. Rozważmy graf po skompresowaniu silnie spójnych składowych. Wiemy, że jest on DAGiem więc możemy go posortować topologicznie. Popatrzmy na ostatnią spójną składową po tym sortowaniu. Nie ma z niej żadnej krawędzi wychodzącej więc z każdego stanu który w niej jest możemy dojść tylko do wierzchołków z tej klasy i z każdego z nich możemy wrócić więc wszystkie stany w tej klasie są istotne.

Zadanie 10 (Kacper Orszulak)

Udowodnij, że jeżeli π jest rozkładem stacjonarnym skończonego łańcucha Markowa o macierzy przejścia P, to $\pi_{y_0} = 0$ dla wszystkich nieistotnych stanów y_0.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
\pi &= \pi P \\
\forall_{n \in \mathbb{N}}\ \pi &= \pi P^n \\
\forall_{n \in \mathbb{N}}\ \pi_{y_0} &= \sum_{x \in S} \pi_x \mathcal{P}_{xy_0}(n) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{y_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in S} \pi_x \mathcal{P}_{xy_0}(n) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{y_0} &= \sum_{x \in S} \pi_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{xy_0}(n) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że $\forall_{x \in S}\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{xy_0}(n) < \infty$.

Niech $N := |\{n \geq 0 \mid X_n = y_0\}| =$ liczba wizyt w y_0.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{xy_0}(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_n = y_0 \mid X_0 = x) \\
&= \mathbb{E}[N \mid X_0 = x] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathcal{P}(N = n \mid X_0 = x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(N \geq k \mid X_0 = x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_x(\text{liczba wizyt w } y_0 \text{ co najmniej } k \text{ razy}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_x\left(\substack{\text{wizyta w } y_0 \\ \text{po skończonej liczbie kroków}}\right) \cdot \mathcal{P}_{y_0}\left(\substack{\text{powrót do } y_0 \\ \text{po skończonej liczbie kroków}}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}_x(\tau_{y_0}^{+} < \infty)}_{a} \cdot \underbrace{\mathcal{P}_{y_0}(\tau_{y_0}^{+} < \infty)}_{q}{}^{k-1}
\end{aligned}$$

Korzystając z zadania 7., wiemy iż $q < 1$. Dany szereg jest zatem zbieżny:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot q^{k-1} = \frac{p}{q-1} < \infty$$

Pokazaliśmy zatem, że RHS równania (1) jest skończone. Lewa strona zatem też musi być skończona. LHS to nieskończona suma pewnej stałej, zatem ta stała musi być zero. Dokładniej $\pi_{y_0} = 0$. $\square$

Zadanie 11 (Wiktoria K)

Udowodnij, że jeżeli macierz przejścia P jest symetryczna ($p_{x,y} = p_{y,x}$), to rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym dla P.

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie Skorzystamy z "ogólnej wskazówki" z zestawu:
Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa na zbiorze stanów S. Niech π będzie rozkładem prawdopodobieństwa na S. Łatwo uzasadnić, że jeśli dla każdego $x, y \in S$ mamy

$$\pi_x p_{x,y} = \pi_y p_{y,x}$$

to π jest rozkładem stacjonarnym.

Zauważmy, że π – rozkład stacjonarny ($\forall x, y \in S\ \pi_x = \pi_y$) w połączeniu z symetrią macierzy P implikuje równość, o której mowa we wskazówce: dla każdego $x, y \in S$, zatem rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym dla P. CKD

Zadanie 12 (Olek Wieczorek)

Niech P będzie macierzą przejścia spaceru losowego na cyklu długości 2025. Znajdź najmniejszą wartość t taką, że $p_{x,y}(t) > 0$ dla wszystkich stanów x i y.

Rozwiązanie

Zauważmy od razu, że nasz łańcuch jest nieokresowy. Z wierzchołka i krawędzią nieskierowana możemy się wrócić w 2 krokach,[1] albo przejść cały cykl w 2025 krokach, więc

$$o(i) = gcd(2, 2025) = 1$$

Cykl jest spójny, łańcuch jest nieprzywiedlny , więc każdy wierzchołek ma okres 1.
Stąd wynika, że istnieje takie t dla którego $\forall_{x,y} p_{x,y}(t) > 0$.
Dodatkowo zauważmy, że wybór punktu startowego x jest nieistotny - cykl można obrócić.
Jeśli przejdziemy jakąś ścieżkę w k krokach to możemy przejść nią w k+2 krokach dodając przejście krawędzią "tam i z powrotem".
Jedynym problemem przejścia między parą wierzchołko w t krokach jest parzystość t.
Dla każdego wierzchołka y $dist(x, y)$ ma inną parzystość niż $2025 - dist(x, y)$, więc między każdą parą wierzchołków istnieje najkrótsza ścieżka o każdej parzystości.
Wystarczy ustalić najmniejsze t dla którego wszystkie takie ścieżki mają długość $\leq$ t.

- Aby przejść z x do x w nieparzystą liczbę kroków musimy obejść cały cykl, który ma długość 2025, więc nieparzyste $t < 2025$ odpada
- Aby przejść z x do jego sąsiada w parzystą liczbę kroków musimy obejść prawie cały cykl, więc najkrótsza taka ścieżka ma długość 2024, więc parzyste $t < 2024$ również odpadają,

Uwzględniając oba warunki najmniejszą niewykluczoną odpowiedzią jest t=2024.

[1] zakładam, że między każdą parą sąsiednich wierzchołków da się przejść w obie strony. Gdyby tak nie było dużo ciężej przeanalizować problem, bo takie t mogłoby nie istnieć

Odpowiedź

$$\boxed{2024}$$

Zadanie 13 (Dominik)

Niech G będzie skończonym grafem z co najmniej jedną krawędzią. Rozważmy łańcuch Markowa, gdzie przestrzeń stanów $\Omega(G)$ jest rodziną wszystkich zbiorów niezależnych w G. Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie $v \in V(G)$. Jeśli $v \in M_t$ to $M_{t+1} = M_t \setminus \{v\}$. Jeśli $v \notin M_t$ to próbujemy dodać v do M_t. To znaczy, jeśli $M_t \cup \{v\}$ jest zbiorem niezależnym w G to $M_{t+1} = M_t \cup \{v\}$, a w przeciwnym przypadku $M_{t+1} = M_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieprzywiedlny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Rozwiązanie

Niech $n = |V(G)|$.

Nieprzywiedlność

Aby udowodnić nieprzywiedlność tego łańcucha musimy udowodnić, że wszystkie pary stanów (zbiorów niezależnych w G) się wzajemnie komunikują, czyli dla każdej pary zbiorów niezależnych $A, B \subseteq V(G)$ istnieje takie k, że $P_{A,B}(k) > 0$.

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ to pewnie zbiory niezależne. Następujący skończony ciąg kroków przechodzi ze stanu A do $\emptyset$, a następnie do B:

- Usuń a_1 ze zbioru A. Taki krok jest możliwy, bo zbiór niezależny po usunięciu wierzchołka pozostaje niezależny, i ma prawdopodobieństwo n^{-1}.
- Podobnie usuwaj wierzchołki a_2 do a_l. Po tych krokach jesteśmy w stanie $\emptyset$.
- Dodaj b_1 do stanu $\emptyset$. Ten krok ma prawdopodobieństwo n^{-1}
- Podobnie dodawaj wierzchołki $b_2, \ldots, b_m$. Każdy z takich kroków jest możliwy, bo wszystkie stany są podzbiorami zbioru niezależnego B, więc również są zbiorami niezależnymi.

Zatem te $k + l$ kroków, każde o prawdopodobieństwie $\frac{1}{n}$ wystarcza, aby przejść ze stanu A do B, więc $P_{A,B}(l + m) \geq n^{-(l+m)} > 0$.

Nieokresowość

Niech A to maksymalny ze względu na inkluzję zbiór niezależny w G. Z treści zadania w G istnieje przynajmniej jedna krawędź, a skoro A jest zbiorem niezależnym, to któryś z końców tej krawędzi, nazwijmy go v, nie należy do A.

Będąc w stanie A wylosowanie wierzchołka v spowoduje pozostanie w stanie A (z maksymalności A), więc: $P_{A,A} \geq n^{-1} > 0$.

Definicja okresu stanu to $\mathrm{o}(v) = \gcd \mathcal{T}(v)$, gdzie $\mathcal{T}(v) = \{t \in \mathbb{N}_1 \mid P_{v,v}(t) > 0\}$.
$P_{A,A} = P_{A,A}(1) > 0$, więc $1 \in \mathcal{T}(v)$, więc $\mathrm{o}(v) = 1$. Z lematu z wykładu:

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

W takim razie wszystkie stany mają okres 1, zatem łańcuch jest **nieokresowy**.

Jednostajność rozkładu stacjonarnego

Udowodnijmy, że macierz przejścia P łańcucha Markowa z zadania jest symetryczna, czyli dla każdego $A, B \in \Omega(G)$ zachodzi $P_{A,B} = P_{B,A}$.

- Jeżeli $A = B$ to **tr.**
- Jeżeli A różni się od B dokładnie jednym wierzchołkiem, powiedzmy $B = A \cup \{v\}$, to jedynie wylosowanie v (z prawdopodobieństwem n^{-1}) przechodzi między tymi stanami. Skoro A i B są zbiorami niezależnymi, to ten krok się udaje. Zachodzi $P_{A,B} = P_{B,A} = n^{-1}$.
- Jeżeli A różni się od B więcej niż jednym wierzchołkiem, to $P_{A,B} = P_{B,A} = 0$, bo każdy krok dodaje lub usuwa co najwyżej jeden wierzchołek.

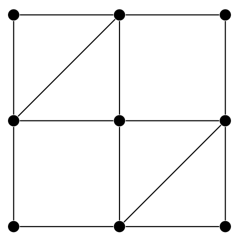
Z zadania 11 wiemy, że skoro macierz przejścia P jest symetryczna, to rozkład stacjonarny jest rozkładem jednostajnym.

Zadanie 14 (Michał)

Rozważ spacer losowy po grafie przedstawionym na rysunku. Spacer startuje z wierzchołka A. Rozważ stowarzyszony z nim łańcuch Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie stanami są wuerzchołki grafu oraz $X_0 = A$.

(i) Wyznacz $\lim_{n\to\infty} P(X_n = A)$ oraz $\lim_{n\to\infty} P(X_n = B)$.

(ii) Jaka jest oczekiwana liczba odwiedzin wierzchołka B przed pierwszym powrotem do A?



Rozwiązanie podpunktu (i)

Łańcuch jest skończony, spójny i aperiodyczny (w grafie są trójkąty i kwadraty, więc okres $= gcd(3, 4) = 1$) więc dla każdego puktu Q $P(X_n = Q)$ zbiega do rozkładu stacjonarnego π. Dla losowego spaceru po grafie rozkład stacjonarny ma postać:

$$\pi(v) = \frac{\deg(v)}{\sum_u \deg(u)}.$$

Wierzchołki narożne mają stopień 2, pozostałe pięć wierzchołków ma stopień 4. Suma stopni:

$$4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 28.$$

Więc

$$\pi(A) = \frac{\deg(A)}{28} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \qquad \pi(B) = \frac{\deg(B)}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

Czyli:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = A) = \frac{1}{14}, \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n = B) = \frac{1}{7}.$$

Rozwiązanie podpunktu (ii)

Oczekiwana liczba odwiedzeń wierzchołka B przed powrotem do A to po prostu stosunek średniej liczby odwiedzin B do odwiedzin A w długim czasie ($n \to \infty$), który jest równy:

$$\frac{\pi(B)}{\pi(A)} = \frac{1/7}{1/14} = 2.$$

Odpowiedź

$$\boxed{\text{(i)} \lim_{n\to\infty} P(X_n = A) = \frac{1}{14}, \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n = B) = \frac{1}{7} \qquad \text{(ii)} \qquad 2}$$

Zadanie 15 (Kamil)

Niech X_n będzie zmienną losową równą sumie oczek w n niezależnych rzutach sprawiedliwą kostką. Pokaż, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_2$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \text{ jest podzielne przez } k) = \frac{1}{k}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy A_n - zmienną losową będącą liczbą oczek w n-tym rzucie.

Zauważmy, że:

$$X_{n+1} \equiv X_n + A_{n+1} \pmod{k},$$

więc X_n tworzy łańcuch Markowa ze stanami będącymi resztami z dzielenia przez k.

Policzymy rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Prawdopodobieństwo przejścia z dowolnego stanu i do każdego z $i+1, i+2, \ldots, i+6 \pmod{k}$ jest równe $\frac{1}{6}$. Macierz przejścia przyjmie więc postać:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie na rozkład stacjonarny π przyjmuje postać:

$$\pi = P\pi,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6}{6} \\ \frac{\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6+\pi_7}{6} \\ \vdots \\ \frac{\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5}{6} \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i = 1.$$

Jasno widać, że rozwiązaniem tego układu jest:

$$\pi_i = \frac{1}{k}, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Z własności rozkładu stacjonarnego wynika więc:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \equiv i \pmod{k}) = \pi_i = \frac{1}{k}.$$

W szczególności:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \equiv 0 \pmod{k}) = \pi_0 = \frac{1}{k}.$$

Zadanie 16 (Kuba Sułkowski)

Mysz i kot niezależnie od siebie przemieszczają się w sposób losowy po spójnym, nieskierowanym i niedwudzielnym grafie G. Niech $n = |V(G)|, m = |E(G)|$. Pokaż, że $O(m^2 n)$ jest ograniczeniem górnym na oczekiwaną liczbę kroków, po której dojdzie do spotkania.

Wskazówka: rozważ łańcuch Markowa na parach indeksów (a, b)

Rozwiązanie

Oznaczmy wierzchołki i krawędzie naszego grafu V i E (czyli $G = (V, E)$).

Zbudujemy graf $H = (V_H, E_H)$, gdzie

- $V_H = V \times V$ - wierzchołek nowego grafu będzie parą wierzchołków w oryginalnym grafie
- $E_H = \left\{\{(u, v), (w, t)\} \in \binom{V_H}{2} : \{u, w\} \in E \wedge \{v, t\} \in E\right\}$
  - krawędź nowego grafu będzie oznaczała, że w grafie G były takie dwie krawędzie, którymi można było przejść z jednej pary wierzchołków do drugiej.

Zauważmy, że spacer losowy w grafie H jest tym samym co operacja z treści zadania. Załóżmy, że mysz i kot byli w wierzchołkach a i b, a po ruchu są w c i d. Szansa na to w oryginalnym grafie to $\frac{1}{d(a)} \cdot \frac{1}{d(b)}$ (z definicji spaceru losowego).
W grafie H oznacza to przejście z wierzchołka (a, b) do (c, d), czyli szansa była $\frac{1}{d_H((a,b))}$.
$d_H((a, b))$ jest liczbą par wierzchołków, do których można się dostać z pary (a, b), czyli dokładnie $d(a) \cdot d(b)$.
Prawdopodobieństwo tych dwóch zdarzeń jest identyczne.

Łatwo zauważyć, że $|V_H| = |V| \cdot |V| = n^2$
Trudniej $|E_H| = \frac{1}{2} \sum_{a,b \in V} d(a)d(b) = \frac{1}{2} \sum_{a \in V} d(a) \sum_{b \in V} d(b) = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2m = 2m^2$

Znajdźmy w grafie G nieparzysty cykl c (graf nie jest dwudzielny).

Załóżmy, że mysz zaczęła w wierzchołku x, a kot w y.

Niech p_1 oznacza spacer (ścieżkę z możliwymi powtórzeniami) długości n zaczynający się w x i kończący się w c. Taki spacer oczywiście istnieje. W grafie spójnym w co najwyżej $n-1$ krokach można się dostać do dowolnego wierzchołka, a następnie można krążyć wokół cyklu.

Analogicznie niech p_2 oznacza spacer z x do dowolnego punktu na c, długości dokładnie n.

Teraz kontynuujmy spacery p_1 i p_2 równocześnie w przeciwnych kierunkach wokół cyklu. Po co najwyżej $|c| \leq n$ krokach spacery spotkają się (bo c miał nieparzystą długość)

Znaleźliśmy dwa spacery o równej długości, nie większej niż $2n$, które kończą się w tym samym punkcie. Te dwa spacery w grafie G możemy potraktować jako jeden spacer w grafie H, zaczynający się w wierzchołku $(x, y) \in V_H$, a kończący się w jakimś (z, z). Oznaczmy go p.

Skorzystamy z lematu z ćwiczeń (`Lemma 7.14`): Dla krawędzi (u, v) mamy $h_{u,v} + h_{v,u} \leq 2|E|$, gdzie $h_{u,v}$ to oczekiwany czas osiągnięcia wierzchołka v zaczynając w u.
Nam wystarczy $h_{u,v} \leq 2|E|$.

Będziemy iterować się po krawędziach na ścieżce p w grafie H. Oczekiwany czas przejścia jedną krawędzią jest z lematu co najwyżej $2|E_H|$, a krawędzi jest co najwyżej $2n$.

$$\mathbb{E}(\texttt{liczba kroków}) \leq |p| \cdot 2|E_H| \leq 2n \cdot 2 \cdot 2m^2 = 8m^2n = O(m^2n) \quad \square$$

Zadanie 17 (Wiktoria Marć)

Rozważmy cykl na n wierzchołkach. Startujemy w dowolnym wierzchołku. W każdym kroku z równym prawdopodobieństwem przechodzimy do jednego z sąsiadów. Jaka jest(asymptotycznie względem n) wartość oczekiwana liczby kroków do odwiedzenia wszystkich wierzchołków cyklu?

(i) Ograniczenie górne
(ii) Ograniczenie dolne
(iii) A co jeżeli w każdym kroku z równym prawdopodobieństwem, czyli $\frac{1}{3}$, zostajemy lub przechodzimy do jednego z sąsiadów?

Rozwiązanie

Skorzystamy z następujących lematów z książki dla spacerów losowych w grafie G:

Lemat 7.14. Dla $u, v \in E(G)$ oczekiwany czas przejścia z u do v i z powrotem do u wynosi $h_{u,v} + h_{v,u} \leq 2|E(G)|$
Lemat 7.15. Czas pokrycia w grafie G jest ograniczony z góry przez $2|E|(|V| - 1)$.

Przez X będziemy oznaczać liczbę kroków potrzebną do odwiedzenia wszystkich wierzchołków.

(i) Z lematu 7.15. mamy oszacowanie z góry: $E(X) \leq 2|E|(|V| - 1) = 2 \cdot 2n \cdot (n - 1) = O(n^2)$

(ii) Możemy skorzystać z faktu, że w spacerze z dwoma barierami pochłaniającymi, 0 i n, oczekiwana liczba kroków do uderzenia w barierę startując z k wynosi $k(n - k)$(można to pokazać indukcyjnie po wyprowadzeniu wzoru)

Oznaczmy X_i - oczekiwana liczba kroków od momentu odwiedzenia po raz pierwszy $(i-1)$-ego z kolei wierzchołka do odwiedzenia po raz pierwszy i-tego wierzchołka. Oczywiście $X_1 = 0$, i zauważmy, że $X = X_1 + ... + X_n$. Jednak X_i możemy rozpatrywać jako właśnie oczekiwaną liczbę kroków w spacerze losowym o barierach w 0 oraz i, ponieważ wszystkie odwiedzone dotychczas wierzchołki sąsiadują ze sobą, tworząc ścieżkę długości $i - 1$, a ostatni odwiedzony jest jednym z jej końców(wynika ze sposobu w jaki spacerujemy po grafie) - czyli stoimy na polu 1 albo $i - 1$ na tej ścieżce z barierami. Wobec tego $E(X_i) = (i - 1) \cdot 1 = i - 1$.

$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n}(i - 1) = O(n^2)$

(iii) Oznaczmy oczekiwaną liczbę kroków z takim rozkładem prawdopodobieństwa jako $E(X')$
Zauważmy że $E(X') = \frac{3}{2}E(X)$, a skoro $E(X) = O(n^2)$ to $E(X') = O(n^2)$

Odpowiedź

$\boxed{\text{W każdym z podpunktów } O(n^2)}$

Zadanie 18 (Krzysztof Peszko)

Graf L_n nazywamy lizakiem i zdefiniowany jest następująco (niech n będzie parzyste). Wierzchołki $\{1, ..., n/2\}$ tworzą klikę $K_{n/2}$, niech u będzie jednym z wierzhołków tej kliki. Pozostałe $n/2$ w połączeniu z u tworzą ściężkę indukowaną na $n/2 + 1$ wierzchołkach. Niech v będzie najbardziej odległym od kliki wierzchołkiem należącym do ścieżki (jedyny wierzchołek w lizaku o stopniu 1). Pokaż, że oczekiwany czas odwiedzenia wszystkich wierzcołków lizaka podczas spaceru wynosi:

(I) $\theta(n^2)$, przy założeniu, że startujemy w v.

(II) $\theta(n^3)$, przy założeniu, że startujemy w u.

Rozwiązanie

Info na start, w dalszych rozważań, nie będę uwzględniał stałych prz n, więc na przykład, pomimo, że klika ma rozmiar $\frac{n}{2}$, to bedę mówił, że ma rozmiar n. Ponieważ, intersuję nas tylko θ, to można tak zrobić.

(I) Podzielmy sobie problem, na przejście z v do u, a potem zrobienie pozostałych wierzchołków z kliki zaczynając z u.

Przejście z v do u, możemy traktować jako jako spacer losowy z dwoma barierami. Najpierw idziemy do sąsiada v, a potem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$, pójścia do u. Oznacza, to, że oczekujemy, że n razy wrócimy do v, zanim dojdziemy do u. Ponieważ każdy spacer ma oczekiwaną liczbę ruchów równą n, to oczekiwana liczba ruchów z dojścia z v do u to $n * n = n^2$.

Teraz zauważamy, że chodzenie po klice, by zaliczyć wszystkie wierzchołki, jest izomorficzne z problemem kolekcjonera kuponów. (Tutaj z gwazdką, ponieważ, nie ma szansy na powrót do tego samego kuponu, ale to tylko polepsza złożoność, a pesymistyczną n^2, dostaliśmy już wcześniej). Wiemy, że potrzbujemy w oczekiwaniu $nlogn$ ruchów, by zaliczyć wszystkie wierzchołki.

Tutaj warto dodać jeszcze jedną stało. Za każdym razme, kiedy robimy coś coś w kolekcjonerze kuponów, jest szansa, że będąc w u przejdziemy na ścieżkę. Będąc w u ta szansa, żeby przejść na ścieżkę to $\frac{1}{n}$, natomiast, łatwo zauważyć, że po pewnym szansie szansa, że w kuponach będziemy w u to też $\frac{1}{n}$. Wiec możemy powiedzieć, że prawdopodobieństwo wejścia na ścieżkę jest równe $\frac{1}{n^2}$, co daje nam oczekiwaną liczbę pójść na ścieżkę jako stałą, o na lepszej expected wartości niż przejście z v do u.

Suma kosztów wychodzi $\theta(n^2)$

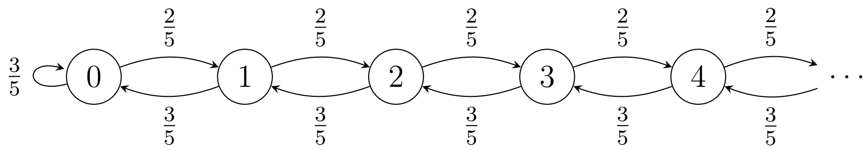
(II) Teraz zobaczmy co się dzieje jeśli zaczynamy od u. W klicę to nadal oczekiwana wartośc ruchów to $n * log(n)$.

Natomiast ciekawsze jest jaka jest szansa na dojście do v. Wejście na ścieżkę ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{n^2}$ (wyżej opisane). Żeby dojść do v szansa jest $\frac{1}{n}$ (symetryczność z przypadkiem

$v- > u$). Więc potrzebujemy n^3 ruchów w klice i n razy pójścia po ścieżce(gdzie każde przejście kosztuje n ruchów).

n^3 ruchów w klidze majoryzuje wsyztskie pozostałe wydatki ruchów, więc koszt ruchów, przed oczekianych odwiedzeniem wszystkch wierzchołków to n^3.

Zadanie 19 (Stanisław Macura)



Czy zadany wyżej spacer Γ jest nieprzywiedlnym i nieokresowym łańcuchem Markowa? Czy istnieje jego rozkład stacjonarny? Na podstawie poprzednich wniosków wywnioskuj, jaką wartość przyjmuje $\mathbb{E}(\tau_x^+)$.

Rozwiązanie

Łańcuch Γ jest nieprzywiedlny bo z każdego stanu możemy dojść do każdego. Jest też nieokresowy bo okres 0 jest równy 1 (da się dojść z 0 do 0 w 1 kroku więc gcd równa się 1), a jako iż jest nieprzywiedlny to okres wszystkich stanów jest identyczny.

Chcemy znaleść rozkład stacjonarny π. Z definicji rozkładu stacjonarnego mamy, że:
$\pi_0 = \pi_0 \cdot P(0,0) + \pi_1 \cdot P(1,0) = \pi_0 \cdot \frac{2}{5} + \pi_1 \cdot \frac{3}{5} \implies \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0$

Dla $i > 1$:
$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot P(i-1,i) + \pi_{i-1} \cdot P(i+1,i) = \pi_{i-1} \cdot \frac{2}{5} + \pi_{i-1} \cdot \frac{3}{5}$

Z tego równania, można się domyśleć, że jak coś ma je spełniać to coś w postaci $\pi_i = \pi_0 \cdot r^i$. Jak podstawimy $\pi_i = \pi_0(\frac{2}{3})^i$ co sugeruje nam to pierwsze równanie to okazuje się że drugie też jest spełnione. Pozostaje policzyć $\sum_{i=0}^{i=\infty} \pi_i = 3\pi_0$. Suma musi być jeden więc $\pi_o = \frac{1}{3}$, a $\pi_i = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ działa jako rozkład stacjonarny.

Tej wartośćci oczekwianej nwm jak wyliczyć ale chat mówi że jest to $\frac{1}{\pi_x}$ xd

Zadanie 20 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

$$\boxed{\text{tutaj daj odpowiedz}}$$