

Zadanie 1 (Wiktor K)

Rozważ dwa następujące procesy losowe:

- (i) wylosuj jednostajnie i niezależnie dwie wartości z $[0,1]$ i zwróć maksimum;
 - (ii) wylosuj jednostajnie wartość z $[0,1]$ i zwróć pierwiastek wylosowanej wartości.
- Próbnaj rozkłady zmiennych losowych opisujących wyjście tych procesów.

Rozwiązanie

Niech X_1, X_2, X_3 - niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$,

Niech $Y_1 = \max(X_1, X_2)$, $Y_2 = \sqrt{X_3}$, wtedy:

dla $y \in [0, 1]$

$$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \leq y) = P(X_1 \leq y \cap X_2 \leq y) = P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) = y^2$$

$$F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \leq y) = P(\sqrt{X_3} \leq y) = P(X_3 \leq y^2) = y^2$$

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

Zatem Y_1, Y_2 mają taki sam rozkład.

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 2 (Wiktor M)

Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $Y = \min(X, 1 - X)$ i $Z = \max(X, 1 - X)$.

Rozwiązanie

Interesują nas dystrybuanty Y oraz Z .

Zauważmy, że skoro $X + (1 - X) = 1$, to $Y \in [0, \frac{1}{2}]$ oraz $Z \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Wtedy mamy:

- Dla $y < 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$
- Dla $y \in [0, \frac{1}{2}]$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) + P(1 - X \leq y) = y + 1 - (1 - y) = 2y$
- Dla $y > \frac{1}{2}$: $F_Y(y) = 1$

Analogicznie dla Z :

- Dla $z < \frac{1}{2}$: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$
- Dla $z \in [\frac{1}{2}, 1]$: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z \wedge 1 - X \leq z) = P(X \leq z \wedge X \geq 1 - z) = P(X \in [1 - z, z]) = \frac{z - (1 - z)}{1 - 0} = 2z - 1$
- Dla $z > 1$: $F_Z(z) = 1$

Funkcję gęstości liczymy ze wzoru $f(x) = F'(x)$.

Odpowiedź

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gd}y \ y < 0, \\ 2y, & \text{gd}y \ y \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{gd}y \ y > \frac{1}{2} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gd}y \ y \notin [0, \frac{1}{2}], \\ 2, & \text{gd}y \ y \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{gd}y \ z < \frac{1}{2}, \\ 2z - 1, & \text{gd}y \ z \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 1, & \text{gd}y \ z > 1 \end{cases}, f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{gd}y \ z \notin [\frac{1}{2}, 1], \\ 2, & \text{gd}y \ z \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Zadanie 3 (Dominik)

Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Znajdź gęstość, dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych:

- (i) $Z = X + Y$,
- (ii) $Z = X - Y$,
- (iii) $Z = |X - Y|$.

Rozwiązanie (i)

Zmienne losowe X oraz Y mają rozkład opisany gęstością:

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & \text{w przedziale } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

oraz dystrybuantą:

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leq 0 \\ \frac{x-0}{1-0} = x & \text{w przedziale } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}.$$

Skorzystamy z wzorów na splatanie z początku zestawu. W rozwiązaniu podpunktu (i) zacznę od policzenia gęstości f_{X+Y} :

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_0^1 f_X(x) f_Y(z-x) dx \end{aligned} \tag{1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \text{ lub } z > 2 \\ \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ \int_{z-1}^1 f_X(x) f_Y(z-x) dx & \text{gdy } z \in [1, 2] \end{cases} \tag{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \text{ lub } z > 2 \\ \int_0^z 1 dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ \int_{z-1}^1 1 dx & \text{gdy } z \in [1, 2] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \text{ lub } z > 2 \\ z & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ 2 - z & \text{gdy } z \in [1, 2] \end{cases}$$

(1), bo tylko gdy $x \in (0, 1)$ zachodzi $f_X(x) \neq 0$.

Dla (2) należy wyznaczyć dla jakich $x \in [0, 1]$ zachodzi również warunek $z - x \in [0, 1]$, żeby $f_X(z - x) \neq 0$.

Dystrybuanta $F_{X+Y}(z)$ to z definicji:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^z f(x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \\ \int_0^z x dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ \int_0^1 x dx + \int_1^z 2 - x dx & \text{gdy } z \in [1, 2] \\ \int_0^1 x dx + \int_1^2 2 - x dx & \text{gdy } z > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \\ \frac{1}{2}z^2 & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}z^2 + 2z - \frac{3}{2}\right) & \text{gdy } z \in [1, 2] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \text{gdy } z > 2 \end{cases} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \\ \frac{1}{2}z^2 & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - z)^2 & \text{gdy } z \in [1, 2] \\ 1 & \text{gdy } z > 2 \end{cases}} \end{aligned}$$

Policzmy wartość oczekiwaną z liniowości:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \frac{1 - 0}{2} + \frac{1 - 0}{2} = \boxed{1},$$

oraz wariancję, dzięki niezależności zmiennych:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{(1 - 0)^2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Rozwiązanie (ii)

Potraktujmy $Z = X - Y$ jako sumę zmiennych losowych X oraz $-Y$. $-Y$ możemy traktować jak zmienną losową z rozkładem jednostajnym na przedziale $[-1, 0]$:

$$f_{-Y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0 - (-1)} = 1 & \text{w przedziale } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

oraz:

$$F_{-Y} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leq -1 \\ \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} = x + 1 & \text{w przedziale } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}.$$

Policzmy gęstość f_{X-Y} :

$$\begin{aligned}
 f_{X-Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \text{ lub } z > 1 \\ \int_0^{1+z} f_X(x) f_Y(z-x) dx & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ \int_z^1 f_X(x) f_Y(z-x) dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \text{ lub } z > 1 \\ \int_0^{1+z} 1 dx & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ \int_z^1 1 dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \end{cases} \\
 &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \text{ lub } z > 1 \\ 1+z & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ 1-z & \text{gdy } z \in [0, 1] \end{cases}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

(2): aby $f_X(x) \neq 0$ oraz $f_Y(z-x) \neq 0$ mamy warunki:

- $0 \leq x \leq 1$, oraz
- $-1 \leq z-x \leq 0$, czyli $z \leq x \leq z+1$.

Policzmy dysrybuantę:

$$\begin{aligned}
 F_{X-Y}(z) &= \int_{-\infty}^z f(x) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \\ \int_{-1}^z 1+x dx & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ \int_{-1}^0 1+x dx + \int_0^z 1-x dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ 1 & \text{gdy } z > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \\ \int_0^{z+1} x dx & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ \int_0^1 x dx - \int_1^{z+1} x dx & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ 1 & \text{gdy } z > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < -1 \\ \frac{1}{2}(z+1)^2 & \text{gdy } z \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2 & \text{gdy } z \in [0, 1] \\ 1 & \text{gdy } z > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Podobnie jak w kroku (i), policzmy wartość oczekiwaną z liniowości:

$$E[X-Y] = E[X] - E[Y] = \frac{1-0}{2} - \frac{1-0}{2} = \boxed{0},$$

oraz wariancję, dzięki niezależności zmiennych:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y) = \frac{(1-0)^2}{12} + \frac{(0-1)^2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Rozwiązanie (iii)

Dystrybuanta $F_Z(z)$

Rozkład łączny pary (X, Y) jest jednostajny na kwadracie jednostkowym $[0, 1] \times [0, 1]$. Pole tego kwadratu wynosi 1.

Szukamy prawdopodobieństwa:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(|X - Y| \leq z)$$

Dla $z \in [0, 1]$, nierówność $|X - Y| \leq z$ jest równoważna układowi:

$$-z \leq X - Y \leq z \iff Y \leq X + z \quad \text{oraz} \quad Y \geq X - z$$

Geometrycznie łatwiej jest obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $P(|X - Y| > z)$ i odjąć je od 1. Zdarzenie to odpowiada dwóm trójkątom w narożnikach kwadratu:

1. Górny lewy róg ($Y > X + z$): trójkąt o przyprostokątnych $1 - z$. Pole wynosi $\frac{1}{2}(1 - z)^2$.
2. Dolny prawy róg ($Y < X - z$): trójkąt o przyprostokątnych $1 - z$. Pole wynosi $\frac{1}{2}(1 - z)^2$.

Suma pól obszarów "zakazanych" wynosi $(1 - z)^2$. Zatem dystrybuanta dla $z \in [0, 1]$ to:

$$F_Z(z) = 1 - (1 - z)^2 = 1 - (1 - 2z + z^2) = 2z - z^2$$

Pełny wzór dystrybuanty:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0 \\ 2z - z^2 & \text{dla } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{dla } z > 1 \end{cases}$$

Gęstość $f_Z(z)$

Gęstość otrzymujemy poprzez zróźniczkowanie dystrybuanty w przedziale $(0, 1)$:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = (2z - z^2)' = 2 - 2z = 2(1 - z)$$

Pełny wzór gęstości:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1 - z) & \text{dla } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana $E[Z]$

Obliczamy wartość oczekiwaną z definicji dla zmiennej ciągłej:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_0^1 z \cdot 2(1-z) dz \\ &= 2 \int_0^1 (z - z^2) dz = 2 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wariancja $Var(Z)$

Korzystamy ze wzoru $Var(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2$. Najpierw obliczamy drugi moment:

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_0^1 z^2 \cdot 2(1-z) dz = 2 \int_0^1 (z^2 - z^3) dz \\ &= 2 \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Obliczamy wariancję:

$$Var(Z) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18}$$

- **Dystrybuanta:** $F_Z(z) = 2z - z^2$ dla $z \in [0, 1]$
- **Gęstość:** $f_Z(z) = 2(1-z)$ dla $z \in (0, 1)$
- **Wartość oczekiwana:** $E[Z] = \frac{1}{3}$
- **Wariancja:** $Var(Z) = \frac{1}{18}$

Zadanie 4 (Stanisław Macura)

Z kwadratu o boku 1 losujemy jednostajnie i niezależnie dwa punkty A oraz B . Wyznacz oczekiwaną długość odcinka AB .

Rozwiązanie

Niech $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, x_1, x_2, y_1, y_2 to niezależne zmienne losowe z rozkładem jednostajnym z przedziału $[0, 1]$. Zaczynamy od policzenia gęstości zmiennych $X = x_1 - x_2$ i $Y = y_1 - y_2$. Możemy to przedstawić jako sumę zmiennych jednostajnych:

a z przedziału $[0, 1]$ $f_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$

b z przedziału $[-1, 0]$ $f_b(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$

Ze splotu funkcji mamy, że $f_{a+b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x-z)dx = \int_0^1 f_b(x-z)dx$ co jak się przyjrzymy przedziałom gdzie $x - z \in [-1, 1]$ to widać że $f_{a+b}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$

X i Y są niezależne więc ich wspólna gęstość $F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x|)(1 - |y|), & x, y \in [-1, 1], \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$

Chcemy teraz policzyć $E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2}(1 - |x|)(1 - |y|)dxdy$.

Jako iż jest to symetryczne dla każdej ćwiartki układu współrzędnych możemy to przekształcić do $4 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}(1 - x)(1 - y)dxdy$. Obliczenie tej całki jest paskudne (podobno jedna z najgorszych na całym probabilu) więc zostawiam link gdzie to można zobaczyć [tu](#).

Wynik wychodzi wtedy $\frac{2+\sqrt{2}+5\ln(\sqrt{2}+1)}{15} \approx 0.52140$.

Zadanie 5 (Kacper Orszulak)

Z kwadratu o boku 1 losujemy jednostajnie punkt P . Punkt P wraz z bokami kwadratu tworzy 4 trójkąty. Wyznacz oczekiwane pole największego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech $P = (X, Y)$, gdzie X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem jednostajnym na przedziale $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[A_{max}] &= \mathbb{E}[\max(A_1, A_2, A_3, A_4)] \\
 &= \mathbb{E}\left[\max\left(\frac{X}{2}, \frac{1-X}{2}, \frac{Y}{2}, \frac{1-Y}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\max(X, 1-X, Y, 1-Y)] \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\underbrace{\max(\max(X, 1-X), \max(Y, 1-Y))}_Z] \\
 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Z(t) dt \\
 &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 t \cdot f_Z(t) dt
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= \mathcal{P}(Z \leq z) \\
 &= \mathcal{P}(\underbrace{\max(X, 1-X) \leq z}_{\nwarrow \text{Zmienne niezależne} \nearrow} \wedge \underbrace{\max(Y, 1-Y) \leq z}) \\
 &= \mathcal{P}(\max(X, 1-X) \leq z) \cdot \mathcal{P}(\max(Y, 1-Y) \leq z) \\
 &= F_{\max(X, 1-X)}(z) \cdot F_{\max(Y, 1-Y)}(z)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\max(X, 1-X)}(z) &= F_{\frac{1}{2}+|X-\frac{1}{2}|}(z) = F_{|X-\frac{1}{2}|}\left(z - \frac{1}{2}\right) \\
 F_{|X-\frac{1}{2}|}(z) &= \mathcal{P}\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \leq z\right) \\
 &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{2} - z \leq X \leq \frac{1}{2} + z\right) \\
 &= \int_{\frac{1}{2}-z}^{\frac{1}{2}+z} f_X(t) dt = 2z
 \end{aligned}$$

Oczywiście zmienne X oraz Y mają ten sam rozkład, więc podstawiamy wynik pod (2).

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= (2z - 1)^2 \\
 f_Z(z) &= F'_Z(z) = 2(2z - 1)(2z - 1)' = 4(2z - 1) = 8z - 4
 \end{aligned}$$

Podstawiamy teraz pod (1).

$$\mathbb{E}[A_{max}] = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 t \cdot f_Z(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 t \cdot (8t - 4) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 (8t^2 - 4t) dt = \frac{5}{12}$$

Odpowiedź

$$\frac{5}{12}$$

Zadanie 6 (Kuba Sułkowski)

Z ustalonego okręgu losujemy jednostajnie i niezależnie 3 punkty A, B oraz C . Jakie jest prawdopodobieństwo, że środek okręgu leży wewnątrz trójkąta ABC ?

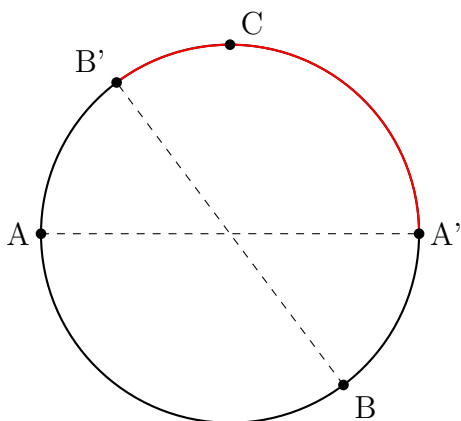
Rozwiązanie

Środek okręgu leży wewnątrz trójkąta, jeśli jest on ostrokątny. Nie może mieć on łuku dłuższego niż połowa obwodu okręgu.

Bez straty ogólności niech punkt A będzie zawsze na lewo od środka okręgu ($A = (-r, 0)$).

Bez straty ogólności niech B będzie na dolnym półokręgu.

Punkt C musi leżeć na krótszym łuku $A'B'$ — w przeciwnym wypadku jeden z łuków AC lub BC , niezawierający trzeciego wierzchołka, byłby dłuższy niż połowa okręgu.



Mając ustalony punkt A widzimy, że długość łuku AB jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \pi r]$.

Dla dowolnego wyboru B prawdopodobieństwo, że C będzie dobre, wynosi $\frac{\widehat{A'B'}}{2\pi r} = \frac{\widehat{AB}}{2\pi r}$

Średnia długość łuku to $\frac{\pi r}{2}$, więc $Pr = \frac{1}{4}$.

To widać, ale można ciut formalniej

$$\int_0^{\pi r} \frac{t}{2\pi r} dt = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \int_0^{\pi r} t dt = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \cdot \frac{\pi^2 r^2}{2} = \frac{1}{4}$$

Bardzo drobnymi zmianami można zmienić to rozumowanie na bardzo podobne do rozwiązania zadania 7., co pozostawiam jako ćwiczenie dla czytelnika.

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

Zadanie 7 (Hubert Jastrzębski)

Łamiemy kij w dwóch niezależnie i jednostajnie wybranych punktach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych kawałków można zbudować trójkąt?

Rozwiązanie

Niech kij ma długość 1 i zostanie złamany w punktach X_1 i X_2 , gdzie $X_1, X_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$.

Funkcje gęstości zmiennych losowych X_1 i X_2 są następujące:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad \text{dla } x_1 \in [0, 1] \quad \wedge \quad f_2(x_2) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad \text{dla } x_2 \in [0, 1]$$

Zmienne losowe są niezależne, więc ich funkcja gęstości wspólnej jest iloczynem funkcji gęstości poszczególnych zmiennych:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{dla } x_1, x_2 \in [0, 1]$$

Policzmy zdarzenie odwrotne, czyli prawdopodobieństwo, że z kawałków nie można zbudować trójkąta. Oznacza to, że jeden z kawałków jest dłuższy niż 0.5.

Mamy trzy przypadki:

1. Pierwszy kawałek jest długi:

Przez pierwszy kawałek mam na myśli kawałek najbardziej po lewej stronie, który ma długość $\min(X_1, X_2)$. Aby był długi (≥ 0.5), musi zachodzić $X_1 \geq 0.5 \wedge X_2 \geq 0.5$.

Prawdopodobieństwo na to wynosi:

$$P(X_1 \geq 0.5 \wedge X_2 \geq 0.5) = P(X_1 \geq 0.5) \cdot P(X_2 \geq 0.5) = \int_{0.5}^1 f(x_1) dx_1 \cdot \int_{0.5}^1 f(x_2) dx_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. Trzeci kawałek jest długi:

Analogicznie $P(X_1 \leq 0.5 \wedge X_2 \leq 0.5) = \frac{1}{4}$

3. Drugi kawałek jest długi:

$$\begin{aligned} P(|X_1 - X_2| \geq 0.5) &= P(X_1 - X_2 \geq 0.5) + P(X_2 - X_1 \geq 0.5) \\ &= \int \int_{\{x_1 \geq x_2 + 0.5\}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int \int_{\{x_2 \geq x_1 + 0.5\}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Rozważmy $\int \int_{\{x_1 \geq x_2 + 0.5\}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$:

Pamiętajmy, że $x_1, x_2 \in [0, 1]$, więc $x_2 + 0.5 \leq 1 \implies x_2 \leq 0.5$.

Natomiast dla ustalonego x_2 , x_1 może przyjmować wartości od $x_2 + 0.5$ do 1. Tak więc:

$$\begin{aligned} \int \int_{\{x_1 \geq x_2 + 0.5\}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^{0.5} \int_{x_2 + 0.5}^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{0.5} \int_{x_2 + 0.5}^1 1 dx_1 dx_2 = \int_0^{0.5} (1 - (x_2 + 0.5)) dx_2 = \int_0^{0.5} (0.5 - x_2) dx_2 \\ &= \left[0.5x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right]_0^{0.5} = \left(0.5 \cdot 0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} \right) - (0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Analogicznie $\int \int_{\{x_2 \geq x_1 + 0.5\}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{8}$.

Tak więc $P(|X_1 - X_2| \geq 0.5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Sumując wszystkie przypadki mamy:

$$P(\text{jeden kawałek jest długi}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{żaden kawałek nie jest długi}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

Zadanie 8 (OSKIBOSKI123)

Łamiemy kij długości 1 w jednostajnie losowo wybranym punkcie. Niech X oznacza punkt złamania.

- (i) Jaka jest oczekiwana długość krótszej części?
- (ii) Jaki jest oczekiwany stosunek długości części krótszej do części dłuższej?
- (iii) Jaki jest oczekiwany stosunek długości części dłuższej do części krótszej?

Rozwiązanie

Ponieważ wybór jest jednostajny na odcinku $[0, 1]$, zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na tym przedziale. Gęstość prawdopodobieństwa dana jest wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$L = \min(X, 1 - X), \quad D = \max(X, 1 - X)$$

gdzie L to długość krótszej części, a D to długość dłuższej części.

(i)

$$\mathbb{E}[L] = \int_0^1 \min(x, 1 - x) \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 \min(x, 1 - x) dx$$

Punkt $x = 0.5$ jest punktem podziału:

$$\mathbb{E}[L] = \int_0^{0.5} x dx + \int_{0.5}^1 (1 - x) dx$$

Obliczamy:

$$\int_0^{0.5} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} = \frac{0.25}{2} = 0.125$$

$$\int_{0.5}^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = (1 - 0.5) - (0.5 - 0.125) = 0.5 - 0.375 = 0.125$$

$$\mathbb{E}[L] = 0.125 + 0.125 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

(ii)

$$R_1 = \frac{L}{D} = \frac{\min(x, 1 - x)}{\max(x, 1 - x)}$$

$$\mathbb{E}[R_1] = \int_0^1 \frac{\min(x, 1 - x)}{\max(x, 1 - x)} \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{\min(x, 1 - x)}{\max(x, 1 - x)} dx$$

Całkujemy po dwóch przedziałach:

$$\mathbb{E}[R_1] = \int_0^{0.5} \frac{x}{1-x} dx + \int_{0.5}^1 \frac{1-x}{x} dx$$

Pierwsza całka:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{x}{1-x} dx &= \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx \\ &= [-\ln(1-x) - x]_0^{0.5} = (-\ln 0.5 - 0.5) - (-\ln 1 - 0) = \ln 2 - 0.5 \end{aligned}$$

Druga całka:

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 \frac{1-x}{x} dx &= \int_{0.5}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx \\ &= [\ln x - x]_{0.5}^1 = (\ln 1 - 1) - (\ln 0.5 - 0.5) = (-1) - (-\ln 2 - 0.5) = \ln 2 - 0.5 \end{aligned}$$

Sumując:

$$\mathbb{E}[R_1] = (\ln 2 - 0.5) + (\ln 2 - 0.5) = 2 \ln 2 - 1$$

(iii)

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{D}{L} = \frac{\max(x, 1-x)}{\min(x, 1-x)} \\ \mathbb{E}[R_2] &= \int_0^1 \frac{\max(x, 1-x)}{\min(x, 1-x)} \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{\max(x, 1-x)}{\min(x, 1-x)} dx \\ \mathbb{E}[R_2] &= \int_0^{0.5} \frac{1-x}{x} dx + \int_{0.5}^1 \frac{x}{1-x} dx \end{aligned}$$

Obliczenie pierwszej całki:

$$\int_0^{0.5} \frac{1-x}{x} dx = \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx$$

Całka $\int_0^{0.5} \frac{1}{x} dx$ jest rozbieżna, co pokazujemy przez granicę:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{0.5} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln x]_{\varepsilon}^{0.5} = \ln 0.5 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = +\infty$$

Nawet po odjęciu skończonej całki $\int_0^{0.5} 1 dx = 0.5$, pierwsza całka dąży do nieskończoności.

Obliczenie drugiej całki:

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 \frac{x}{1-x} dx &= \int_{0.5}^1 \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx \\ &= [-\ln(1-x) - x]_{0.5}^1 \end{aligned}$$

W $x = 1$: $-\ln(0) - 1$ - tutaj $\ln 0 = -\infty$, ale liczymy granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln(1-t) - t]_{0.5}^t &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [(-\ln(1-t) - t) - (-\ln 0.5 - 0.5)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln(1-t) - t + \ln 0.5 + 0.5] \end{aligned}$$

Człon $-\ln(1-t) \rightarrow +\infty$, więc całka od 0.5 do 1 też jest rozbieżna!

Zatem obie całki w $\mathbb{E}[R_2]$ są rozbieżne do $+\infty$, co potwierdza:

$$\mathbb{E}[R_2] = \infty$$

Odpowiedź

$$\boxed{\text{(i)} \frac{1}{4}} \quad \boxed{\text{(ii)} 2 \ln 2 - 1} \quad \boxed{\text{(iii)} \infty}$$

Zadanie 9 (Pavlo Tsikalysyn)

Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że najbliższa liczba całkowita do ilorazu X/Y jest parzysta? Wynik przedstaw w formie $a + b\pi$.

Rozwiązanie

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & x \leq y, \\ f_2(x, y), & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in [2 * x, 1], \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in \cup_{i=0}^{\infty} [\frac{2x}{4i+5}, \frac{2x}{4i+3}], \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(\text{round}(\frac{X}{Y}) - \text{parzyste}) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_x^1 f_1(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^x f_2(x, y) dy dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^1 dy dx + \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\frac{2x}{2i+5}}^{\frac{2x}{2i+3}} dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) dx + \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{2x}{2i+3} - \frac{2x}{2i+5}) dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \int_0^1 2x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(i+1)}}{2i+1} dx = \frac{1}{4} + \int_0^1 2x(1 - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\pi}$$

Zadanie 10 (Kamil)

Losujemy n przedziałów $I_1, \dots, I_n$ w następujący sposób: konstruując i -ty przedział losujemy niezależnie i jednostajnie jego oba końce z przedziału $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że istnieje punkt p należący do wszystkich wylosowanych przedziałów?

Rozwiązanie

Sprowadzamy zadanie do dyskretnego problemu. Wylosujmy wszystkie końce $X_1, \dots, X_n$ oraz $Y_1, \dots, Y_n$ i posortujmy otrzymując $Z_1, \dots, Z_{2n}$. Aby istniał punkt p , należący do wszystkich przedziałów, musi się on znajdować w przedziale (Z_n, Z_{n+1}) i dla każdego I_k jeden z jego krańców musi być w $(Z_1, \dots, Z_n)$, a drugi w $(Z_{n+1}, \dots, Z_{2n})$. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$P = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Ze względu na 2^n możliwości wyboru części Z -tów dla krańców każdego przedziału, a $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ na spemutowanie.

Odpowiedź

$$P = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Zadanie 11 (Kuba Sułkowski)

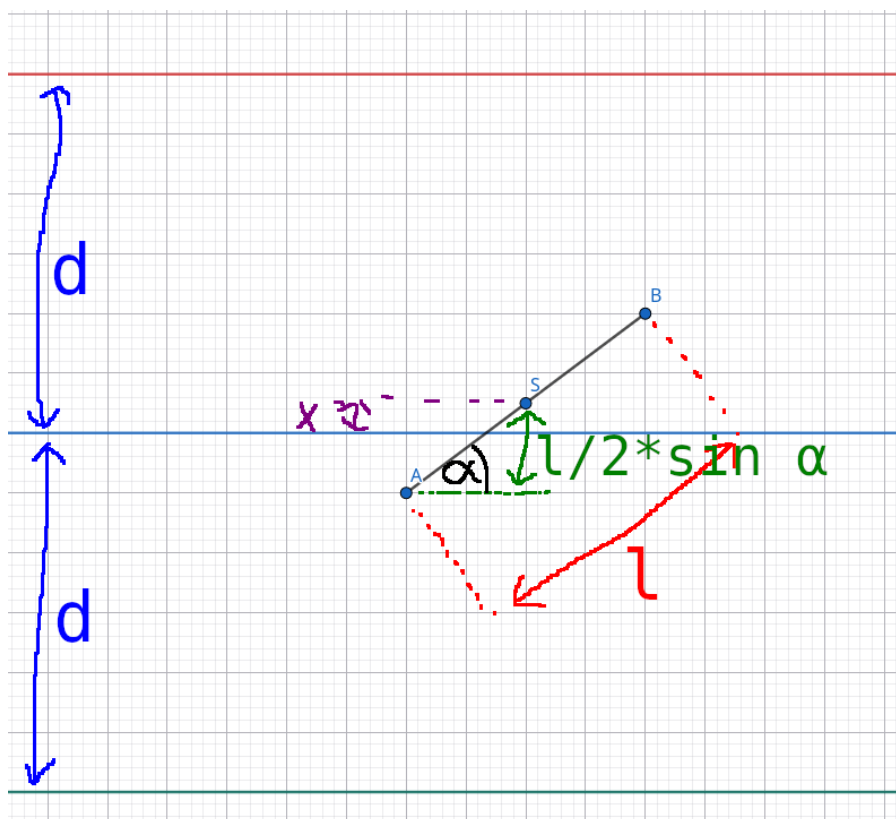
(igła Buffona) Płaszczyznę przecięto zbiorem poziomych linii. Odstęp między dwoma sąsiednimi liniami wynosi d . Rzucamy igłą długości l na tę płaszczyznę. Wyznacz prawdopodobieństwo przecięcia linii.

Rozwiązanie

Rozważymy dwa przypadki

Igła krótsza (lub równa) od dystansu między liniami

Mamy $l \leq d$. Jeśli igła po rzuceniu utworzy z liniami jakiś kąt ostry α , to przetnie się z taką linią, której odległość od środka igły była co najwyżej $\frac{l}{2} \cdot \sin \alpha$.



Zdarzenie jest cykliczne, więc możemy założyć że $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. α ma rozkład jednostajny.

Odległość X środka igły od najbliższej linii przyjmuje wartości z przedziału $[0, \frac{d}{2}]$. Ma rozkład jednostajny.

$$P(\text{sukces}) = P\left(\frac{l}{2} \sin \alpha \geq X\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{l}{2} \sin \alpha\right) \cdot \frac{2}{d} d\alpha$$

Gdzie rozbiliśmy zdarzenie na podzdarzenia: X większy od już ustalonego α

- $\frac{2}{\pi}$ — gęstość rozkładu α (jednostajna)

- $\frac{l}{2} \sin \alpha$ — "ilość" takich X -ów, które spełniają nierówność
- $\frac{2}{d}$ — gęstość zmiennej X (jednostajna)

W prezentacji <https://probabil.tcs.uj.edu.pl/docs/igla.pdf> jest przedstawione to samo za pomocą całki podwójnej, tutaj został pominięty ten krok.

$$P(\text{sukces}) = \frac{2l}{\pi d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha = \frac{2l}{\pi d} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi d} \cdot 1 = \frac{2l}{\pi d}$$

Igła dłuższa od dystansu między liniami

Mamy $l > d$. Po ustaleniu jakiegoś α , mieliśmy $P(X \leq \frac{l}{2} \sin \alpha) = \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \frac{2}{d}$.

Teraz nie jest to już prawdą. Może się zdarzyć, że dla jakiegoś α , nie jest możliwe wylosowanie X który nie spełni nierówności.

Na przykład, dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Igła jest pionowo i jest dłuższa niż dystans między liniami, więc na pewno którąś przetnie. Według naszego naiwnego wzorku ma na to prawdopodobieństwo $\frac{l}{d} > 1$.

Dopóki $\frac{l}{d} \sin \alpha$ nie przekracza 1 wszystko działa. Można więc policzyć:

$$P(\text{sukces}) = P\left(\frac{l}{2} \sin \alpha \geq X\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \cdot \max\left(1, \frac{l}{2} \sin \alpha \frac{2}{d}\right) d\alpha$$

Mamy $\frac{l}{d} \sin \alpha > 1$ wtw. $\alpha > \arcsin \frac{d}{l}$. Można więc łatwo rozbić na sumę dwóch całek

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left(1, \frac{l}{d} \sin \alpha\right) d\alpha &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\arcsin \frac{d}{l}} \frac{l}{d} \sin \alpha + \int_{\arcsin \frac{d}{l}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{d} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\arcsin \frac{d}{l}} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{l} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{d} \left(1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{d}{l} \right) \right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{l} \right) \right) \\ &= \frac{2l}{\pi d} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2} \right) + \frac{2}{\pi} \arccos \frac{d}{l} \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$\frac{2l}{\pi d}, \text{ gdy } l \leq d$$

$$\frac{2l}{\pi d} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2} \right) + \frac{2}{\pi} \arccos \frac{d}{l}, \text{ gdy } l > d$$

Zadanie 12 (Olek Wieczorek)

(krzyżyk Buffona) Na płaszczyznę przeciętą równoległymi liniami o odstępnie 1 rzucono dwie jednostkowe igły sklejone prostopadle środkami. Niech Z będzie liczbą przecięć tak utworzonego krzyżyka z liniami. Policz $E(Z)$ i $\text{Var}(Z)$.

Rozwiązanie

Rozbijmy Z na indykatory:

$$Z = X_1 + X_2$$

Gdzie $X_1 = 1$ gdy 1. igła przecina deskę i 0 w p.p. Analogicznie dla X_2
Teraz już łatwo policzyć $E(Z)$, bo:

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) = P(X_1 = 1) + P(X_1 = 1) = 2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

¹ Wariancję też liczymy wzorem:

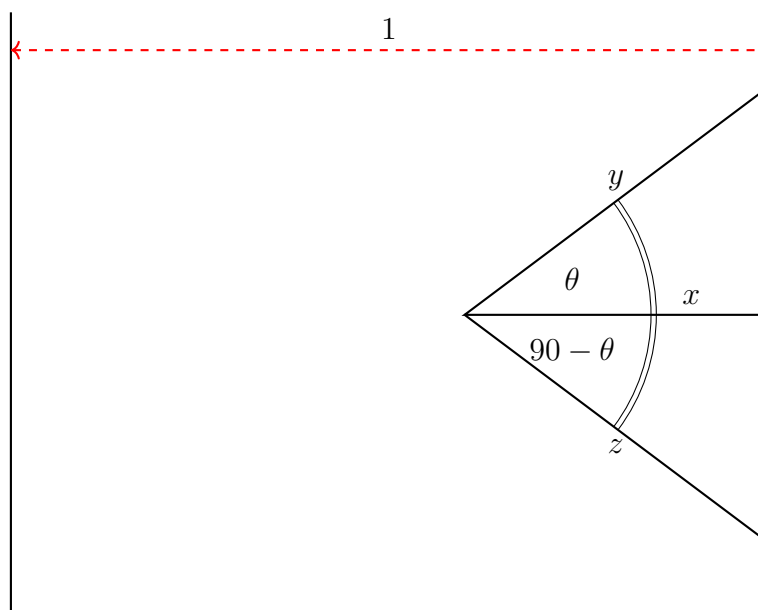
$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

Z własności indykatorów mamy:

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = p(1-p) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{2\pi - 4}{\pi^2}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) - \frac{4}{\pi^2}$$

Teraz niestety musimy rozpatrzyć przypadek gdy obie igły przecinają deskę jednocześnie. Do tego przyda się rysunek:



¹Dowód tego, że $P(\text{igła przecina deskę}) = \frac{2}{\pi}$ jest poprzednim zadaniem, więc go pominię

Igły przetną deskę wtw. $y \leq \frac{1}{2} \wedge z \leq \frac{1}{2}$

Mamy również: $\cos(\theta) = \frac{x}{y}$ oraz $\sin(\theta) = \cos(90 - \theta) = \frac{x}{z}$ Po prostym przekształceniu i podstawieniu mamy:

$$x \leq \frac{\cos(\theta)}{2} \wedge x \leq \frac{\sin(\theta)}{2}$$

Wystarczy policzyć prawdopodobieństwo, że zmienna X (odległość od deski) jest nie większa niż $\frac{\min(\sin(\theta), \cos(\theta))}{2}$ Zauważmy, że to minimum to $\sin(\theta)$ dla $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ oraz $\cos(\theta)$ dla $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ Teraz zapiszmy gęstości X, θ i ich splotu.

$$f_X(x) = 2 \text{ dla } x \in (0, \frac{1}{2})^2$$

$$f_\theta(x) = \frac{2}{\pi} \text{ dla } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Ponieważ X i θ niezależne to gęstość ich splot to iloczyn ich gęstości

$$f_{X\theta}(x) = \frac{4}{\pi} \text{ dla } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ } x \in (0, \frac{1}{2})$$

Teraz niestety trzeba policzyć całkę:

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2) &= P\left(X \leq \frac{\min(\sin(\theta), \cos(\theta))}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin(\theta)}{2}} f_{X\theta}(x) dx d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\cos(\theta)}{2}} f_{X\theta}(x) dx d\theta = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin(\theta)}{2}} 1 dx d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\cos(\theta)}{2}} 1 dx d\theta \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \right) = \frac{2}{\pi} ([-\cos(\theta)]_0^{\pi/4} + [\sin(\theta)]_{\pi/4}^{\pi/2}) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

Teraz nareszcie możemy wstawić wszystko z powrotem do wzoru:

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{4\pi - 2\pi\sqrt{2} - 4}{\pi^2} \\ Var(Z) &= 2 \cdot \frac{2\pi - 4}{\pi^2} + 2 \cdot \frac{4\pi - 2\pi\sqrt{2} - 4}{\pi^2} = \frac{12\pi - 4\pi\sqrt{2} - 16}{\pi^2} \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$E(Z) = \frac{4}{\pi} \quad Var(Z) = \frac{12\pi - 4\pi\sqrt{2} - 16}{\pi^2}$$

²Dla uproszczenia zapisu poza podanym przedziałem gęstość to 0. Tak samo dla innych gęstości

Zadanie 13 (Krzysztof Peszko)

Wybierz punkt X w sposób losowy i jednostajny z okręgu O o średnicy 1 i o środku w punkcie $(0, 10)$. Rozważ średnicę O o końcu w punkcie X . Jaka jest oczekiwana długość projekcji tej średnicy na oś OX .

Rozwiązanie

Fakt 1:

Położenie środka nie ma znaczenia, ponieważ długość projekcji, zależy tylko do średnicy i jest one relatywne względem środka.

Fakt 2

Jeśli X jest na dolnej połówce, to można go zmianić, na symetryczny X na górnej połówce, co pokazuję, że wystarczy obliczyć dla X w górnej połówce razy 2.

Fakt 3:

Z pozostałych ćwiartek, wystarczy wziąć lewą ćwiartkę i ze względu na symetryzm da nam to dobry wynik.

Teraz obliczemy Dystrybuante zmiennej X . dla danego x . PRzypomnijmy, że $F(x) = P(X < x)$. W sumie bardziej będzie nas intersowało obliczyć dopełnienie $F(X)$ (bo jest łatwiej policzyć, a 1 zniknie i tak przy pochodnej).

Żeby policzyć $1 - F(x)$ patrzymy trygonometrycznie, na kąt α , między średnicą O , a jej projekcją.

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot x$$

$$\alpha = \arccos(2x)$$

Możemy zauważyć, że prawdopodobieństwo, że X jest większe niż x jest równe ułamkowi $\frac{\alpha}{\pi}$

$$1 - F(X) = \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\alpha \cdot 2}{\pi} = \frac{\arccos(2x) \cdot 2}{\pi}$$

$$F(X) = 1 - \frac{\arccos(2x) \cdot 2}{\pi}$$

$$f(X) = F(X)' = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$E[X] = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = [t = 1 - 4x^2, dt = -8x dt] =$$

$$E[X] = \frac{4}{\pi} \cdot \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{-1}{8} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 = \frac{1}{\pi}$$

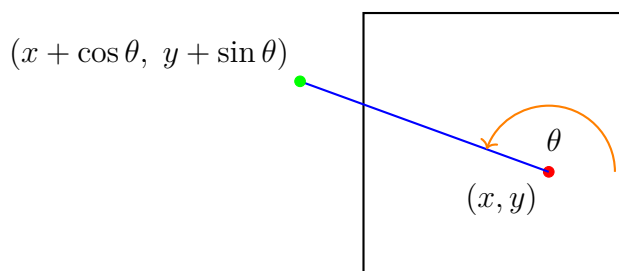
Pamiętajmy, jeszcze, że musimy $E(x)$ pomnożyć razy 2, więc:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Zadanie 14 (Michał)

Z kwadratu jednostkowego $[0, 1] \times [0, 1]$ losujemy punkt w sposób jednostajny. Później niezależnie wybieramy kąt w sposób jednostajny na $[0, 2\pi]$. Z jakim prawdopodobieństwem odcinek jednostkowy rozpoczynający się w wylosowanym punkcie i zmierzający w kierunku wylosowanego kąta wychodzi poza rozważany kwadrat?

Rozwiązanie



Niech punkt startu to (x, y) i kąt θ . Koniec odcinka jednostkowego ma współrzędne:

$$(x + \cos \theta, y + \sin \theta).$$

Odcinek pozostaje w kwadracie wtedy i tylko wtedy gdy punkt końca odcinka jednostkowego jest w kwadracie, czyli:

$$0 \leq x + \cos \theta \leq 1 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq y + \sin \theta \leq 1.$$

Dla ustalonego θ , dopuszczalne wartości x (z pierwszej nierówności) to:

$$x \in [0, 1] \cap [-\cos \theta, 1 - \cos \theta],$$

długość tego przedziału wynosi $1 - |\cos \theta|$. Analogicznie dla y : $1 - |\sin \theta|$.

Zatem prawdopodobieństwo, że odcinek pozostaje w kwadracie dla ustalonego θ , to:

$$(1 - |\cos \theta|)(1 - |\sin \theta|).$$

Teraz wystarczy uśrednić ten wynik po wylosowanym kącie. Uśredniając po θ , otrzymujemy:

$$P_{\text{wewnątrz}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \theta|)(1 - |\sin \theta|) d\theta.$$

Rozwijamy iloczyn pod całką:

$$(1 - |\cos \theta|)(1 - |\sin \theta|) = 1 - |\cos \theta| - |\sin \theta| + |\cos \theta| |\sin \theta|.$$

Zatem:

$$P_{\text{wewnątrz}} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\cos \theta| + |\sin \theta|) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta| |\sin \theta| d\theta.$$

Obliczamy całki:

$$\int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta = 4, \quad \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta = 4, \quad \int_0^{2\pi} |\cos \theta| |\sin \theta| d\theta = 2.$$

Finalnie:

$$P_{\text{wewnątrz}} = 1 - \frac{4+4}{2\pi} + \frac{2}{2\pi} = 1 - \frac{6}{2\pi} = 1 - \frac{3}{\pi}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że odcinek wychodzi poza kwadrat, wynosi:

$$P_{\text{wychodzi}} = \frac{3}{\pi}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{3}{\pi}}$$

Zadanie 15 (Filip Maniak)

Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Niech $U = XY$ i $V = Z^2$.

- Wyznacz dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję U .
- Wyznacz dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję V .
- Oblicz $P(U < V)$.
- Wyznacz $E(X|U)$.

Rozwiązanie

U

Liczymy Dystrybuante:

$$\begin{aligned} F_U(a) &= P(XY \leq a) = \int_0^1 f_X(x) \int_0^{\frac{a}{x}} f_Y(y) dy dx = \int_0^a f_X(x) * 1 + \int_a^1 f_X(x) F_Y\left(\frac{a}{x}\right) dx = \\ &= a + \int_a^1 \frac{a}{x} = a - a \ln a \end{aligned}$$

Teraz z tego liczymy funkcję gęstości:

$$f_U(a) = F'_U(a) = (a - a \ln a)' = 1 - \ln a - 1 = -\ln a$$

Liczymy też $E[U]$:

$$E[U] = \int_0^1 f_U(x) x dx = - \int_0^1 x \ln x dx = - \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ bo de l'Hospital. Całkę liczymy całkując przez części. Została wariancja:

$$\text{Var}[U] = E[U^2] - E[U]^2 = \int_0^1 x^2(-\ln x)dx - \frac{1}{16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$

Tu też całkę liczymy całkując przez części.

V

Liczymy Dystrybuantę (dla $a \in (0, 1)$):

$$F_V(a) = P(Z^2 \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq Z \leq \sqrt{a}) = \int_0^{\sqrt{a}} 1dz = \sqrt{a}$$

Teraz z tego liczymy funkcję gęstości:

$$f_V(a) = F'_V(a) = (\sqrt{a})' = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Liczymy też $E[V]$:

$$E[V] = \int_0^1 a f_V(a) da = \int_0^1 a \frac{1}{2\sqrt{a}} da = \frac{1}{2} \int_0^1 a^{\frac{1}{2}} da = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Tutaj całkę liczymy prosto ze wzoru na funkcję potęgową (x^n). Została wariancja:

$$\text{Var}[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \int_0^1 a^2 \frac{1}{2\sqrt{a}} da - \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \int_0^1 a^{\frac{3}{2}} da - \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

Tu również całkę liczymy jako funkcję potęgową.

$P(U < V)$

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} P(U < V) &= \int_0^1 f_V(x) F_U(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} (x - x \ln x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(0 - \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$E[X|U]$

Chcemy obliczyć $E[X|U](a) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|U=a}(x) dx$. W tym celu musimy wyznaczyć gęstość warunkową $f_{X|U=a}(x)$. Skorzystamy ze wzoru:

$$f_{X|U=a}(x) = \frac{f_{X,U}(x, a)}{f_U(a)}$$

Mianownik już znamy: $f_U(a) = -\ln a$. Licznik (gęstość łączną) wyznaczymy, licząc pochodną z dystrybuanty $F_{X,U}(x, a)$.

Dla $a < x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_{X,U}(x, a) &= P(X \leq x, XY \leq a) = P(X \leq a) + P(a < X \leq x, Y \leq \frac{a}{X}) = \\ &= \int_0^a 1 dt + \int_a^x \frac{a}{t} dt = a + a(\ln x - \ln a) \end{aligned}$$

Liczmy gęstość łączną:

$$f_{X,U}(x, a) = \frac{\partial^2 F_{X,U}}{\partial x \partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial}{\partial x} (a + a \ln x - a \ln a) \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

Zatem gęstość warunkowa dla $x \in [a, 1]$ wynosi:

$$f_{X|U=a}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln a} = \frac{-1}{x \ln a}$$

Stąd wartość oczekiwana:

$$\begin{aligned} E[X|U=a] &= \int_a^1 x \cdot f_{X|U=a}(x) dx = \int_a^1 x \left(\frac{-1}{x \ln a} \right) dx = \\ &= \frac{-1}{\ln a} \int_a^1 1 dx = \frac{-1}{\ln a} [x]_a^1 = \frac{-(1-a)}{\ln a} = \frac{a-1}{\ln a} \end{aligned}$$

Zadanie 16 (Mateusz Wojaczek)

Niech X i Y mają łączną gęstość $f(x, y) = cx(y-x)e^{-y}$ dla $0 \leq x \leq y < \infty$.

1. Wyznacz wartość c .
2. Udowodnij, że

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y-x)y^{-3} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y, \\ f_{Y|X}(y|x) &= (y-x)e^{x-y} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y < \infty. \end{aligned}$$

3. Wynioskuj, że $E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$ oraz $E(Y|X) = X + 2$.

Rozwiązanie

(i) Wyznaczenie stałej c

Aby $f_{X,Y}(x, y)$ była gęstością, całka podwójna musi wynosić 1:

$$\int_0^\infty \int_0^y cx(y-x)e^{-y} dx dy = 1.$$

Najpierw całkujemy względem x :

$$\int_0^y x(y-x)dx = \int_0^y (xy - x^2)dx = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{6}y^3.$$

Zatem:

$$\int_0^\infty c \cdot \frac{1}{6} y^3 e^{-y} dy = 1 \implies \frac{c}{6} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy = 1.$$

$\int_0^\infty y^3 e^{-y} dy = 6$, więc:

$$\frac{c}{6} \cdot 6 = c = 1.$$

Odpowiedź: $c = 1$.

(ii) Wyznaczenie gęstości warunkowych

Gęstość warunkowa X przy $Y = y$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Najpierw obliczamy $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^y 6x(y-x)e^{-y} dx = 6e^{-y} \cdot \frac{1}{6} y^3 = y^3 e^{-y}.$$

Zatem:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{6x(y-x)e^{-y}}{y^3 e^{-y}} = \frac{6x(y-x)}{y^3}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Gęstość warunkowa Y przy $X = x$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Najpierw obliczamy $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_x^\infty 6x(y-x)e^{-y} dy = 6x \int_x^\infty (y-x)e^{-y} dy.$$

Podstawiamy $u = y - x \implies dy = du, y - x = u, y = u + x$:

$$\int_x^\infty (y-x)e^{-y} dy = \int_0^\infty u e^{-(u+x)} du = e^{-x} \int_0^\infty u e^{-u} du = e^{-x} \cdot 1! = e^{-x}.$$

Zatem $f_X(x) = 6x e^{-x}$. Wobec tego:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{6x(y-x)e^{-y}}{6x e^{-x}} = (y-x)e^{-(y-x)}, \quad y \geq x.$$

(iii) Wartości oczekiwane warunkowe

Dla $E(X|Y)$:

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^y x \cdot \frac{6x(y-x)}{y^3} dx = \frac{6}{y^3} \int_0^y (x^2 y - x^3) dx.$$

$$\int_0^y (x^2 y - x^3) dx = y \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} = \frac{y^4}{3} - \frac{y^4}{4} = \frac{y^4}{12}.$$

$$E(X|Y = y) = \frac{6}{y^3} \cdot \frac{y^4}{12} = \frac{y}{2}.$$

Dla $E(Y|X)$:

$$E(Y|X = x) = \int_x^\infty y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_x^\infty y(y-x)e^{-(y-x)} dy.$$

Podstawiamy $u = y - x \implies y = u + x, dy = du$:

$$E(Y|X = x) = \int_0^\infty (u+x) u e^{-u} du = \int_0^\infty u^2 e^{-u} du + x \int_0^\infty u e^{-u} du = 2 + x \cdot 1 = x + 2.$$

$$E(X|Y) = \frac{1}{2}Y, \quad E(Y|X) = X + 2.$$

Odpowiedź

Wartość c :

$$c = 1$$

Gęstości warunkowe:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{y}^{-3}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}-\mathbf{y}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y < \infty$$

Wartości oczekiwane warunkowe:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 2$$

Wartość c :

$$c = 1$$

Gęstości warunkowe:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{y}^{-3}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}-\mathbf{y}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y < \infty$$

Wartości oczekiwane warunkowe:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 2$$

Wartość c :

$$\mathbf{c} = 1$$

Gęstości warunkowe:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{y}^{-3}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}-\mathbf{y}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y < \infty$$

Wartości oczekiwane warunkowe:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 2$$

Wartość c :

$$\mathbf{c} = 1$$

Gęstości warunkowe:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{y}^{-3}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}-\mathbf{y}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq y < \infty$$

Wartości oczekiwane warunkowe:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 2$$