

Przypominam: Zajęcia grupy 2. 17.12.2025 zaczynają się wyjątkowo o 12:00

Zadanie 1 (Kuba Sułkowski)

Udowodnij, że rozkład wykładniczy ma uogólnioną własność bez pamięci. To znaczy, jeśli X jest zmienną o rozkładzie wykładniczym, Y i Z są zmiennymi o rozkładach ciągłych przyjmującymi wartości nieujemne, i X, Y, Z są niezależne to mamy

$$P(X > Y + Z \mid X > Y) = P(X > Z)$$

Rozwiązanie

Założmy, że parametrem rozkładu X jest λ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$)

$$P(X > Z) = \int_0^\infty f_Z(z) \cdot (1 - F_X(z)) \, dz = \int_0^\infty f_Z(z) e^{-\lambda z} \, dz$$

— dla każdego nieujemnego z rozważamy zdarzenie, że X jest od niego większy.

Rozpisując prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(X > Y + Z \mid X > Y) = \frac{P(X > Y + Z \wedge X > Y)}{P(X > Y)} = \frac{P(X > Y + Z)}{P(X > Y)}$$

$$\begin{aligned} P(X > Y + Z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_Y(y) f_Z(z) \cdot (1 - F_X(y + z)) \, dy \, dz = \int_0^\infty \int_0^\infty f_Y(y) f_Z(z) e^{-\lambda(y+z)} \, dy \, dz \\ &= \int_0^\infty f_Y(y) e^{-\lambda y} \, dy \int_0^\infty f_Z(z) e^{-\lambda z} \, dz = P(X > Y) \cdot P(X > Z) \quad \square \end{aligned}$$

Zadanie 2 (Olek)

Policz funkcje tworzące momenty dla rozkładu jednostajnego (na $[a, b]$), wykładniczego (z parametrem λ) i Gamma (z parametrami a i λ).

Rozwiązanie

W tym zadaniu nie dzieje się absolutnie nic ciekawego, po prostu przepisujemy wzór na gęstość funkcji o danym rozkładzie, a potem wstawiamy e^{tx} do wzoru na $E(x)$.

Rozkład jednostajny

Dla $X \sim Uni(a, b)$ f. gęstości to $f_X(z) = \frac{1}{b-a}$ dla $z \in (a, b)$

$$E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

Rozkład wykładniczy

Dla $X \sim Exp(\lambda)$ f. gęstości to $f_X(z) = \lambda e^{-\lambda z}$ dla $z > 0$

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^\infty$$

Całka musi być skończona, ponieważ w p.p. wartość oczekiwana będzie nieokreślona. Musimy więc mieć $t < \lambda^1$ teraz widać, że z takim ograniczeniem $e^{(t-\lambda)x}$ zbiega do 0.

$$\lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^\infty = \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

Rozkład gamma

Dla $X \sim Gamma(a, \lambda)$ f. gęstości to $f_X(z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a z^{a-1} e^{-\lambda z}$ dla $z > 0$

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} x^{a-1} dx$$

Funkcja jest trochę podobna do funkcji gamma. Żeby była jeszcze bardziej podobna wyłączamy $(\lambda - t)^a$ przed całkę.

$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} x^{a-1} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)(\lambda-t)^a} \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x} ((\lambda-t)x)^{a-1} \frac{dx}{x} = \frac{\lambda^a \Gamma(a)}{\Gamma(a)(\lambda-t)^a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^a$$

Odpowiedź

Jednostajny: $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

Wykładniczy: $\frac{\lambda}{\lambda-t}$

Gamma: $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^a$

¹na wykładzie chyba nie było to wprost powiedziane, ale $\lambda > 0$, gdyby tak nie było to gęstość - a co za tym idzie prawdopodobieństwo - mogłyby wyjść ujemne, a tego byśmy **bardzo** nie chcieli

Zadanie 3 (OSKIBOSKI123)

Niech Z będzie zmienną losową o gęstości $f(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$ dla każdego $z \in \mathbb{R}$. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Policz funkcje tworzące momenty dla rozkładów Z i $X - Y$. Wywnioskuj, że te zmienne mają taki sam rozkład.

Rozwiązanie

Zmienna Z ma gęstość $f(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$.

$$M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{2}e^{-|z|} dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{z(t+1)} dz + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{z(t-1)} dz.$$

Dla $t \in (-1, 1)$ mamy:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{z(t+1)} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}, \quad \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{z(t-1)} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t}.$$

Zatem

$$M_Z(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Niech $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ będą niezależne. Wtedy ich MGF obliczamy:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)x} dx.$$

Całka zbieżna dla $1-t > 0$, czyli $t < 1$:

$$M_X(t) = \left[-\frac{e^{-(1-t)x}}{1-t} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{1-t} \right) = \frac{1}{1-t}, \quad t < 1.$$

Analogicznie $M_Y(t) = \frac{1}{1-t}$ dla $t < 1$.

Dla $X - Y$:

$$M_{X-Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X-Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}] \mathbb{E}[e^{-tY}] = M_X(t) M_Y(-t) = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Jako, że funkcje tworzące są takie same i dobrze zdefiniowane w otoczeniu 0, to rozkład też jest taki sam. [Nie wiem jakiego formlizmu tu wymaga Gajdzica pisząc wywnioskuj :)]

Zadanie 4 (Pavlo Tsikalysyn)

Niech $\lambda, \mu, \nu > 0$ i niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o parametrach λ, μ, ν . Niech $t > 0$.

- (i) Znajdź $P(X < Y < Z)$.
- (ii) Znajdź $P(X < Y | X > t)$.

Rozwiązanie

(i)

$$\begin{aligned}
 P(X < Y < Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \int_y^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dz dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^y f_X(x) \int_y^{\infty} f_Z(z) dz dx dy = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^y f_X(x) dx \int_y^{\infty} f_Z(z) dz dy \\
 \int_{-\infty}^y f_X(x) dx &= \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| -e^{-\lambda x} \right|_0^y = -e^{-\lambda y} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda y} \\
 \int_y^{\infty} f_Z(z) dz &= \int_y^{\infty} \nu e^{-\nu z} dz = \left| -e^{-\nu z} \right|_y^{\infty} = -e^{-\nu \infty} - (-e^{-\nu y}) = e^{-\nu y} \\
 P(X < Y < Z) &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} (1 - e^{-\lambda y}) e^{-\nu y} dy = \mu \int_0^{\infty} (e^{-\mu y - \nu y} - e^{-\lambda y - \mu y - \nu y}) dy = \\
 &= \mu \int_0^{\infty} e^{-y(\mu + \nu)} dy - \mu \int_0^{\infty} e^{-y(\lambda + \mu + \nu)} dy = \mu \left(\left| \frac{-e^{-y(\mu + \nu)}}{\mu + \nu} \right|_0^{\infty} - \left| \frac{-e^{-y(\lambda + \mu + \nu)}}{\lambda + \mu + \nu} \right|_0^{\infty} \right) = \\
 &= \mu \left(\frac{1}{\mu + \nu} - \frac{1}{\lambda + \mu + \nu} \right) = \frac{\mu \lambda}{(\mu + \nu)(\lambda + \mu + \nu)}
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie z ćwiczeń

$$P(X < Y < Z) = P(X = \min(X, Y, Z), Y = \min(Y, Z)) = \frac{\mu \lambda}{(\mu + \nu)(\lambda + \mu + \nu)}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 P(X < Y | X > t) &= P(X < Y \cap t < Y | X > t) = P(Y > t) P(X < Y | X > t, Y > t) = \\
 &= P(Y > t) P(X < Y) = e^{-\mu t} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
 \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$\boxed{(i) \frac{\mu \lambda}{(\mu + \nu)(\lambda + \mu + \nu)}, (ii) e^{-\mu t} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}$$

Zadanie 5 (Kamil)

Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem wykładniczym z parametrem 1. Znajdź gęstość i dystrybuantę zmiennej $Z = X + Y$.

Dalej, niech $X_1, \dots, X_k$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem wykładniczym z parametrem λ . Udowodnij, że zmienna losowa $X_1 + \dots + X_k$ ma rozkład $\Gamma(k, \lambda)$.

Wykaż to na dwa sposoby:

1. Dowodząc przez indukcję po k i licząc wprost gęstość sumy przez konwolucję,
2. Porównując funkcje tworzące momenty.

Rozwiązanie - część 1

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Ich funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest dana wzorem:

$$f_X(x) = e^{-x} \quad \text{dla} \quad x \geq 0$$

Ponieważ X i Y są niezależne, gęstość sumy $Z = X + Y$ jest konwolucją gęstości X i Y , czyli:

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

Ponieważ $f_X(x) = f_Y(x) = e^{-x}$, mamy:

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-x} e^{-(z-x)} dx$$

Po uproszczeniu:

$$f_Z(z) = e^{-z} \int_0^z 1 dx = e^{-z} z$$

Zatem gęstość prawdopodobieństwa zmiennej Z wynosi:

$$f_Z(z) = ze^{-z} \quad \text{dla} \quad z \geq 0$$

Aby znaleźć dystrybuantę $F_Z(z)$, musimy obliczyć całkę z gęstości:

$$F_Z(z) = \int_0^z f_Z(t) dt = \int_0^z te^{-t} dt$$

Całkę tę obliczamy metodą przez części. Niech:

$$u = t \quad \text{oraz} \quad dv = e^{-t} dt$$

Wtedy:

$$du = dt \quad \text{oraz} \quad v = -e^{-t}$$

Zatem:

$$\int_0^z te^{-t} dt = \left[-te^{-t}\right]_0^z + \int_0^z e^{-t} dt$$

Po obliczeniu:

$$= -ze^{-z} + \left[-e^{-t}\right]_0^z = -ze^{-z} + (1 - e^{-z})$$

Stąd dystrybuanta $F_Z(z)$ wynosi:

$$F_Z(z) = 1 - (z + 1)e^{-z} \quad \text{dla} \quad z \geq 0$$

Rozwiązanie - część 2

Rozważmy teraz k niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_k$, które mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , tzn. dla każdej zmiennej X_i :

$$f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x \geq 0$$

Chcemy udowodnić, że suma tych zmiennych, czyli $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, ma rozkład gamma $\Gamma(k, \lambda)$. Rozkład gamma ma funkcję gęstości:

$$f_S(s) = \frac{\lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!} \quad \text{dla} \quad s \geq 0$$

Dowód przez indukcję

Krok 1: Podstawowy przypadek $k = 1$:

Jeśli mamy jedną zmienną X_1 o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ , to jej gęstość wynosi:

$$f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x \geq 0$$

Jest to dokładnie gęstość rozkładu gamma $\Gamma(1, \lambda)$.

Krok 2: Indukcja:

Założmy, że suma $S_{k-1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1}$ ma rozkład gamma $\Gamma(k-1, \lambda)$. To oznacza, że:

$$f_{S_{k-1}}(s) = \frac{\lambda^{k-1} s^{k-2} e^{-\lambda s}}{(k-2)!} \quad \text{dla} \quad s \geq 0$$

Chcemy pokazać, że $S_k = S_{k-1} + X_k$ ma rozkład gamma $\Gamma(k, \lambda)$. Ponieważ S_{k-1} i X_k są niezależne, gęstość sumy S_k jest konwolucją gęstości $f_{S_{k-1}}(s)$ i $f_{X_k}(x)$:

$$f_{S_k}(s) = \int_0^s f_{S_{k-1}}(s-x) f_{X_k}(x) dx$$

Podstawiając gęstości:

$$f_{S_k}(s) = \int_0^s \frac{\lambda^{k-1}(s-x)^{k-2} e^{-\lambda(s-x)}}{(k-2)!} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda s}}{(k-2)!} \int_0^s (s-x)^{k-2} dx = \frac{\lambda^k e^{-\lambda s}}{(k-2)!} \int_0^s x^{k-2} dx = \frac{\lambda^k e^{-\lambda s}}{(k-2)!} \frac{s^{k-1}}{k-1}$$

Zatem:

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!}$$

Co jest gęstością rozkładu gamma $\Gamma(k, \lambda)$.

Dowód przez funkcję tworzącą

Było na wykładzie i jest już spisane.

Odpowiedź

$$f_Z(z) = ze^{-z}$$

$$F_Z(z) = 1 - (z+1)e^{-z}$$

Zadanie 6 (Wiktor K)

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Obliczyć

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P(\min(X, Y) > R \mid X + Y > 3R).$$

Rozwiązanie

$$P(\min(X, Y) > R \mid X + Y > 3R) = \frac{P(\min(X, Y) > R \cap X + Y > 3R)}{P(X + Y > 3R)}$$

Policzmy prawdopodobieństwo z licznika:

$$\begin{aligned} P(\min(X, Y) > R \cap X + Y > 3R) &= \int_R^\infty f_X(x) \int_{\max(3R-x, R)}^\infty f_Y(y) dy dx \\ &= \int_R^{2R} e^{-x} \int_{3R-x}^\infty e^{-y} dy dx + \int_{2R}^\infty e^{-x} \int_R^\infty e^{-y} dy dx \\ &= Re^{-3R} + e^{-3R} \end{aligned}$$

Policzmy prawdopodobieństwo z mianownika:

Zmienna $X + Y$ ma rozkład $\Gamma(2, 1)$ (twierdzenie z wykładu) zatem:

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X + Y > 3R) &= 1 - P(X + Y \leq 3R) = 1 - \int_0^{3R} xe^{-x} dx \\ &= 1 - (-3Re^{-3R} - e^{-3R} + 1) = e^{-3R} + 3Re^{-3R} \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P(\min(X, Y) > R \mid X + Y > 3R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-3R}(1 + R)}{e^{-3R}(1 + 3R)} = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

Zadanie 7 (Hubert Jastrzębski)

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$. Wyznacz wartość oczekiwaną k -tej wartości w posortowanym ciągu tych zmiennych.

Rozwiązanie

Lemat: $(X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)) \sim \text{Exp}(n\lambda)$

Dowód:

Wiemy, że $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ i są niezależne. Dystrybuenta każdej z nich to:

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

W takim razie $P(X_i \geq x) = e^{-\lambda x}$

$$P(X_{(1)} \geq x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x) = P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x)$$

Zmienne są niezależne, więc:

$$P(X_{(1)} \geq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x}$$

Zatem $X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\lambda)$, ckd.

Nasze zadanie

Z lematu wiemy, że $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(n)$. Zatem $E[X_{(1)}] = \frac{1}{n}$.

Zdefiniujmy sobie teraz odstęp między kolejnymi wartościami w posortowanym ciągu:

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, \quad \dots, \quad Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$$

Ze względu na brak pamięci rozkładu wykładniczego, po wystąpieniu $X_{(1)}$, pozostałe $n - 1$ zmiennych losowych “startują od nowa” i nadal są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$.

Zatem Y_2 to czas oczekiwania na drugą najmniejszą wartość po wystąpieniu pierwszej i “resetowaniu” pozostałych zmiennych, czyli czas oczekiwania na minimum spośród $n - 1$ zmiennych losowych z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$. Z lematu więc $Y_2 \sim \text{Exp}(n - 1)$ i $E[Y_2] = \frac{1}{n-1}$.

Analogicznie jest dla pozostałych odstępów:

$$Y_i \sim \text{Exp}(n - i + 1) \implies E[Y_i] = \frac{1}{n - i + 1}$$

Możemy wyrazić $X_{(k)}$ przez sumę odstępów:

$$\begin{aligned} X_{(k)} &= \sum_{i=1}^k Y_i \implies E[X_{(k)}] = \sum_{i=1}^k E[Y_i] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n - i + 1} \\ E[X_{(k)}] &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n - i} = \sum_{i=n-k+1}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = H_n - H_{n-k} \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$E[X_{(k)}] = H_n - H_{n-k}$$

Zadanie 8 (Dominik)

Rzucamy monetą, gdzie orzeł wypada z prawdopodobieństwem p . Każdy rzut trwa czas będący zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem 1. Pokaż, że łączny czas oczekiwania na orła jest zmienną losową z rozkładu wykładniczego o parametrze p .

Rozwiązanie

Niech X to zmienna losowa określająca liczbę rzutów do wypadnięcia orła. X ma rozkład geometryczny z parametrem p .

Niech Y_i to czas trwania i -tego rzutu. Wtedy $Y = Y_1 + \dots + Y_X$ to czas oczekiwania na orła.

Rozważmy gęstość w zależności od wartości X :

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot P(X = x)$$

Pod warunkiem $X = x$ jest tak, że $Y = Y_1 + \dots + Y_x$. Y jest sumą x niezależnych zmiennych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, więc z zadania 5 Y ma rozkład $\Gamma(x, 1)$. Ze wstępu do zestawu znamy gęstość zmiennej o takim rozkładzie:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{\Gamma(x)} y^{x-1} e^{-y}$$

A dodatkowo wiemy, że X ma rozkład geometryczny, więc $P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p$. Mamy:

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} y^{x-1} e^{-y} \cdot (1 - p)^{x-1} p$$

Wyciągnijmy stałe czynniki przed sumę i uprośćmy. Wykorzystajmy dodatkowo fakt, że skoro $x \in \mathbb{N}_+$, to $\Gamma(x) = (x - 1)!$. W drugiej linii przesuwamy iterator w sumie:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= p e^{-y} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x - 1)!} y^{x-1} \cdot (1 - p)^{x-1} \\ &= p e^{-y} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(y - yp)^x}{x!} \end{aligned}$$

W tym momencie udajemy, że mieliśmy porządną analizę, rozpoznajemy tutaj wzór

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

i otrzymujemy:

$$f_Y(y) = pe^{-y}e^{y-yp} = pe^{-py}.$$

To jest dokładnie gęstość zmiennej losowej z rozkładu wykładniczego z parametrem p , więc Y jest taką zmienną losową, co kończy dowód.

Zadanie 9 (Michał)

Niech $(X_n)_{n=1}^\infty$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem

1. Dla danego k niech $N(k) = \min\{n : \sum_{i=1}^n X_i > k\}$. Wyznacz $E(N(k))$ na dwa sposoby:

- (i) bezpośrednio korzystając z gęstości wyliczonych w jednym z poprzednich zadań i wzoru $E(N(k)) = \sum_{j=1}^\infty P(N(k) \geq j)$;
- (ii) nie licząc ani jednej całki i korzystając ze wzoru $E(\sum_{i=1}^{N(k)} X_i) = E(N(k))$ (wcześniej go dowodząc).

Rozwiązanie podpunktu (i)

Zauważmy, że $N(k)$ to indeks pierwszego sumowania, które przekracza k . Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, wtedy

$$N(k) \geq j \Leftrightarrow S_{j-1} \leq k$$

Z treści zadania 5, dla $\lambda = 1$ mamy, że suma k niezależnych zmiennych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ ma rozkład $\Gamma(k, 1)$.

Więc gęstość zmiennej S_m (dla $m \geq 1$) wynosi (fakt 3, zestaw 9):

$$f_{S_m}(x) = \frac{1}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-x} \quad \text{dla } x > 0$$

Policzmy wartość oczekiwaną:

$$E(N(k)) = \sum_{j=1}^\infty P(N(k) \geq j)$$

$$E(N(k)) = \sum_{j=1}^\infty P(S_{j-1} \leq k)$$

$$E(N(k)) = P(S_0 \leq k) + \sum_{j=2}^\infty P(S_{j-1} \leq k)$$

Pierwszy składnik jest równy 1 (bo $S_0 = 0 \leq k$). Dla $j \geq 2$ podstawiamy $m = j - 1$

$$E(N(k)) = 1 + \sum_{m=1}^\infty \int_0^k \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-x} dx$$

Teraz robimy sztuczkę i zamieniamy całkę z sumą:

$$E(N(k)) = 1 + \int_0^k \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^{-x} dx$$

O to w nawiasie to szereg Taylora:

$$E(N(k)) = 1 + \int_0^k e^x e^{-x} dx = 1 + \int_0^k dx = k + 1$$

Rozwiązanie podpunktu (ii)

Dowód tożsamości $E(\sum_{i=1}^{N(k)} X_i) = E(N(k))$

Czyli korzystając ze zdefiniowanego S_n z podpunktu (i) chcemy pokazać, że:

$$E(S_{N(k)}) = E(N(k))$$

Możemy zapisać sumę przy użyciu indykatorów:

$$I_j = \begin{cases} 1 & N(k) \geq j \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N(k)} X_i = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cdot I_j$$

Korzystając z liniowości:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(k)} X_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(X_j \cdot I_j)$$

Zauważmy, że zdarzenie $N(k) \geq j$ oznacza, że proces nie zatrzymał się przed krokiem j , czyli $S_{j-1} \leq k$. Zdarzenie to zależy wyłącznie od zmiennych $X_1, \dots, X_{j-1}$, a zatem jest niezależne od X_j . Możemy więc rozdzielić wartość oczekiwaną z prawej strony:

$$E(X_j \cdot I_j) = E(X_j) \cdot P(N(k) \geq j)$$

Ponieważ $X_j \sim \text{Exp}(1)$, to $E(X_j) = 1$. Więc:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(k)} X_i\right) = 1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} P(N(k) \geq j)$$

Prawa strona to dokładnie $E(N(k))$. Udowodniliśmy więc, że:

$$E(S_{N(k)}) = E(N(k))$$

Wyznaczenie wartości oczekiwanej

Rozważmy lewą stronę równości, czyli $E(S_{N(k)})$. Zmienna $S_{N(k)}$ oznacza wartość sumy w momencie pierwszego przekroczenia progu k . Możemy ją zapisać jako sumę progu k i nadwyżkę:

$$S_{N(k)} = k + (S_{N(k)} - k)$$

Z własności braku pamięci rozkładu wykładniczego wynika, że wielkość, o którą suma przekroczy poziom k , ma ten sam rozkład co pojedynczy składnik sumy. Zatem zmienna losowa $(S_{N(k)} - k)$ ma rozkład $\text{Exp}(1)$, a wartość oczekiwana nadwyżki wynosi 1:

$$E(S_{N(k)} - k) = 1$$

Stąd otrzymujemy:

$$E(S_{N(k)}) = k + 1$$

Podstawiając ten wynik do udowodnionej tożsamości:

$$E(N(k)) = E(S_{N(k)}) = k + 1$$

Odpowiedź

$$E(N(k)) = k + 1$$

Zadanie 10 (Kacper Orszulak)

Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Wykaż, że zmienna losowa $-\ln X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.

Rozwiązanie

Niech $Y := -\ln X \iff X = e^{-Y}$. Wtedy

$$F_Y(y) = \mathcal{P}(Y \leq y) = \mathcal{P}(-\ln X \leq y) = \mathcal{P}(X \geq e^{-y}) = 1 - \mathcal{P}(X \leq e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y}.$$

Dla przypomnienia: $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ wtw. $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$

Skoro $\text{img } X = [0, 1]$, to $\text{img } Y = [0, +\infty)$, a zatem rzeczywiście $Y \sim \text{Exp}(1)$. $\square$

Zadanie 11 (Mateusz Wojaczek)

Niech $(X_n)_{n=1}^\infty$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Dla danego $k \in (0, 1)$ niech

$$N(k) = \min \left\{ n : \prod_{i=1}^n X_i < k \right\}.$$

Wyznacz $\mathbb{E}[N(k)]$.

Rozwiązanie

$$\mathbb{E}[N(k)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(k) > n)$$

$$\begin{aligned} P(N(k) > n) &= P\left(\prod_{i=1}^n X_i \geq k\right) = P\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \geq \ln(k)\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n -\ln(X_i) \leq -\ln(k)\right) \end{aligned}$$

Niech

$$Y_i = -\ln(X_i) \sim \text{Exp}(1)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Gamma}(n, 1) \quad // \text{twierdzenie 12.3.1 suffering}$$

Niech $c = -\ln(k)$, zatem

$$P(N(k) > n) = P(S_n \leq c) = \int_0^c f_{S_n}(x) dx$$

gdzie

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad // \text{definicja 12.3.2 suffering}$$

$$P(N(k) > n) = \int_0^c \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\mathbb{E}[N(k)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(k) > n) = P(N(k) > 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N(k) > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(N(k) > n)$$

zatem

$$\mathbb{E}[N(k)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx = 1 + \int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= 1 + \int_0^c e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx \quad // \text{rozwińcie Taylora}$$

$$= 1 + \int_0^c e^{-x} \cdot e^x dx = 1 + \int_0^c 1 dx = 1 + [x]_0^c = 1 + c$$

$$1 + c = 1 - \ln(k)$$

Odpowiedź

$1 - \ln(k)$

Zadanie 12 (Wiktoria Marć)

Niech T_1, T_2 będą zmiennymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1 i niech $T = T_1 + T_2$. Oblicz $E(T_1|T)$ oraz $E(T|T_1)$.

Rozwiązanie

W ogólnym przypadku, gdy nie wiemy nic o zależności T_1 oraz T_2 , możemy jedynie stwierdzić:

$$\begin{aligned} E(T_1|T)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{T_1|T}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{T_1, T}(x, t)}{f_T(t)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{T_1, T_2}(x, t-x)}{f_T(t)} dx \end{aligned}$$

Z kolei druga warunkowa wartość oczekiwana:

$$\begin{aligned} E(T|T_1) &= E(T_1 + T_2|T_1) = E(T_1|T_1) + E(T_2|T_1) = T_1 + E(T_2|T_1) \\ E(T|T_1)(t) &= t + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{T_2|T_1}(x, t) dx = t + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{T_1, T_2}(t, x)}{f_{T_1}(t)} dx \end{aligned}$$

W przypadku, gdy T_1 i T_2 niekoniecznie są niezależne, nie znając f_{T_1, T_2} , nie jesteśmy w stanie obliczyć konkretnych wartości oczekiwanych. Z kolei gdy T_1, T_2 niezależne, to:

1. z symetrii która wynika z niezależności i takiego samego parametru rozkładu wykładniczego:

$$E(T_1|T) = E(T_2|T) = T/2$$

2. z niezależności: $E(T|T_1) = T_1 + E(T_2|T_1) = T_1 + E(T_2) = T_1 + \frac{1}{\lambda} = T_1 + 1$

Odpowiedź

Dla przypadku T_1, T_2 niezależne:

$$\begin{aligned} E(T_1 | T) &= \frac{T}{2}, \\ E(T | T_1) &= T_1 + 1. \end{aligned}$$

Zadanie 13 (Autor/ka)

Niech $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$, a $T_1, T_2, \dots$ – czasy kolejnych zdarzeń.

Rozwiązanie

(i) Zmienna losowa $N(3)$ ma rozkład Poissona z parametrem 3λ , zatem

$$P(N(3) = 5) = \frac{(3\lambda)^5}{5!} e^{-3\lambda}.$$

(ii) Przyrost procesu na przedziale $(1, 3]$ ma rozkład Poissona z parametrem 2λ . Stąd

$$P(N(3) - N(1) = 4) = \frac{(2\lambda)^4}{4!} e^{-2\lambda}.$$

(iii) Rozbijamy proces na dwa niezależne odcinki czasowe:

- $X = N(1)$, liczba zdarzeń w przedziale $[0, 1]$.
 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
- $Y = N(3) - N(1)$, liczba zdarzeń w przedziale $(1, 3]$.
 $Y \sim \text{Poisson}(2\lambda)$.

Zdarzenie to jest równoważne warunkom na niezależne zmienne X i Y :

$$X \geq 1 \quad \text{oraz} \quad X + Y \leq 2.$$

Ponieważ X i Y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, wszystkie możliwe pary (X, Y) , które spełniają oba warunki, to:

- (a) $X = 1$ i $Y = 0$ (suma = 1)
- (b) $X = 1$ i $Y = 1$ (suma = 2)
- (c) $X = 2$ i $Y = 0$ (suma = 2)

Korzystamy z niezależności X i Y : $P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$.

$$\begin{aligned} P(N(1) \geq 1 \cap N(3) \leq 2) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) \\ &= P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) \\ &= (\lambda e^{-\lambda}) \cdot (e^{-2\lambda}) \\ &\quad + (\lambda e^{-\lambda}) \cdot (2\lambda e^{-2\lambda}) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right) \cdot (e^{-2\lambda}) \\ &= \lambda e^{-3\lambda} + 2\lambda^2 e^{-3\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-3\lambda} \\ &= e^{-3\lambda} \left(\lambda + 2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \\ &= \lambda e^{-3\lambda} \left(1 + \frac{5}{2}\lambda\right) \end{aligned}$$

(iv) Czas T_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ , więc

$$P\left(T_1 > \frac{1}{2}\right) = e^{-\lambda/2}.$$

(v) • Zdarzenie $T_1 > \frac{1}{2}$ (pierwsze zdarzenie nastąpiło po czasie $\frac{1}{2}$) jest równoważne:

$$N\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

• Zdarzenie $T_3 \leq \frac{3}{2}$ (trzecie zdarzenie nastąpiło przed czasem $\frac{3}{2}$) jest równoważne:

$$N\left(\frac{3}{2}\right) \geq 3$$

Niech N_A będzie liczbą zdarzeń w przedziale $[0, \frac{1}{2}]$, a N_B liczbą zdarzeń w przedziale $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Zmienne N_A i N_B są niezależne:

- $N_A \sim \text{Poisson}(\lambda/2)$
- $N_B \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (długość przedziału to 1)

Warunki na N_A i N_B to:

$$N_A = 0 \quad \text{oraz} \quad N_A + N_B \geq 3.$$

Ponieważ $N_A = 0$, warunki upraszczają się do:

$$N_A = 0 \quad \text{oraz} \quad N_B \geq 3.$$

Korzystamy z niezależności N_A i N_B : $P = P(N_A = 0) \cdot P(N_B \geq 3)$.

- $P(N_A = 0)$:

$$P(N_A = 0) = e^{-\lambda/2}$$

- $P(N_B \geq 3)$:

$$P(N_B \geq 3) = 1 - P(N_B \leq 2) = 1 - [P(N_B = 0) + P(N_B = 1) + P(N_B = 2)]$$

$$P(N_B \geq 3) = 1 - \left[e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \right]$$

$$P(N_B \geq 3) = 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

Ostateczny wynik:

$$\begin{aligned} P\left(T_1 > \frac{1}{2} \cap T_3 \leq \frac{3}{2}\right) &= e^{-\lambda/2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] \\ &= e^{-\lambda/2} - e^{-(\lambda/2+\lambda)} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right) \\ &= e^{-\lambda/2} - e^{-3\lambda/2} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right) \end{aligned}$$

- (vi) Zmienna T_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ , a czas pomiędzy pierwszym a drugim zdarzeniem $T_2 - T_1$ również ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Zmiennie te są niezależne. Wobec tego

$$P(T_1 > 1 \cap T_2 - T_1 \leq \frac{1}{2}) = P(T_1 > 1) P(T_2 - T_1 \leq \frac{1}{2}).$$

Ponieważ

$$P(T_1 > 1) = e^{-\lambda}, \quad P(T_2 - T_1 \leq \frac{1}{2}) = 1 - e^{-\lambda/2},$$

ostatecznie otrzymujemy

$$P(T_1 > 1 \cap T_2 - T_1 \leq \frac{1}{2}) = e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda/2}).$$

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 14 (Stanisław Macura)

Niech $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem $\lambda = 2023$.

- Jeżeli $N(2023) = 2023$, to z jakim prawdopodobieństwem $N(2022) = 2022$?
- Z jakim prawdopodobieństwem nie zajdzie żadne zdarzenie w przedziale czasowym $[2023, 2024]$?
Z jakim prawdopodobieństwem nie zajdzie żadne zdarzenie w przedziale czasowym $[2023, 2024]$, jeżeli wiemy, że $N(2023) = 2023$?
- Dla $n > 1$ niech X_n będzie czasem pomiędzy $(n-1)$ -szym i n -tym zdarzeniem w procesie, a niech X_1 będzie czasem pierwszego zdarzenia. Oblicz

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(X_1 + X_2 > X_3).$$

Rozwiązanie

- Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe mamy

$$\mathbb{P}(N(2022) = 2022 \mid N(2023) = 2023) = \frac{\mathbb{P}(N(2022) = 2022 \cap N(2023) = 2023)}{\mathbb{P}(N(2023) = 2023)}.$$

Ze stacjonarności i niezależność przyrostów

$$\mathbb{P}(N(2022) = 2022 \cap N(2023) = 2023) = \mathbb{P}(N(2022) = 2022 \cap N(1) = 1) = \mathbb{P}(N(2022) = 2022) * \mathbb{P}(N(1) = 1)$$

Po podstawieniu w 3 miesiącach wzoru $\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ i skróceniu dostajemy wynik $\left(\frac{2022}{2023}\right)^{2022}$

- Prawdopodobieństwo, że nie zajdzie żadne zdarzenie w przedziale czasowym $[2023, 2024]$ jest równe z stacjonarności prawdopodobieństwu temu, że nie zajdzie zdarzenie w przedziale $[0, 1]$ czyli $\mathbb{P}(N(1) = 0) = e^{-2023}$. Dodatkowo z niezależności wiemy, że to drugie prawdopodobieństwo jest takie samo.

3. Wiemy, że zmienne X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym. $P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$ bo mamy dwie zmienne niezależne o tej samej gęstości.

Dla drugiego prawdopodobieństwa wiemy, że $Y = X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$ więc

$$f_Y(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y > 0$$

$$\mathbb{P}(X_3 < y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 > X_3) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_3 < y) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \lambda^2 y e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty y e^{-\lambda y} dy - \lambda^2 \int_0^\infty y e^{-2\lambda y} dy \\ &= \lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} \right) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Zadanie 15 (Filip)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

i

Rozważmy taki eksperyment: Jednemu z procesorów P1, P2 zostało przydzielone nowe zadanie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że P1 skończy pierwszy? Korzystamy z faktu z wykładu:

$$P(P1 < P2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2025}{2026}$$

Teraz zauważmy, że prawdopodobieństwo tego, że P2 zrobi tylko jedno, to prawdopodobieństwo tego że P1 wygra każdy z 2023 eksperymentów, czyli nasza odpowiedź to:

$$1 - \left(\frac{2025}{2026} \right)^{2023}$$

ii

Możemy rozbić wartość oczekiwaną, na indykatory czy dane zadanie zostało wykonane na P2. Z eksperymentu powyżej, każdy indykator ma wartość oczekiwaną $\frac{1}{2026}$, czyli $E[X] = 1 + \frac{2023}{2026}$

iii

Zauważmy, że po prostu wykonujemy ten sam eksperyment co w (i). Szansa to: $\frac{2025}{2026}$.

iv

Zauważmy, że pytamy tutaj o prawdopodobieństwo, zajścia 2 zadań niezależnie: P2 wygrał eksperyment o zadanie 1000 i przegrał każdy kolejny (niezależne, bo rozkład bez pamięci):

$$P(T_{1000} \text{ na P2} \wedge T_{1001} - T_{2025} \text{ na P1}) = \frac{1}{2026} * \left(\frac{2025}{2026}\right)^{1025}$$

v

Wiemy, że P2 wykonał dokładnie 3 zadania, czyli P1 wykonał wszystkie inne. Możemy to policzyć z prostego kombi:

$$P(zdarzenia) = \frac{\binom{2023}{2} - \binom{1999}{2}}{\binom{2023}{2}} = 1 - \frac{1999 * 1998}{2023 * 2022} = 0.02359219$$