

Zadanie 1 (Mateusz Wojaczek)

Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa na skończonej przestrzeni stanów S . Dla $y \in S$ niech $m_y = \min_{x \in S} P(x, y)$. Skonstruować sprzęganie $((X_t, Y_t))_{t \in \mathbb{N}}$ dwóch łańcuchów Markowa z macierzą przejścia P takie, że dla każdego $t \geq 0$ oraz $z \in S$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t = z) \geq m_z.$$

Rozwiązanie

Definiujemy

$$m = \sum_{y \in S} m_y.$$

Niech $(X_t, Y_t) = (x, y)$. Zakładamy, że jeśli łańcuchy się zeszły, to już się nie rozchodzą, tzn.

$$X_t = Y_t \Rightarrow X_{t+1} = Y_{t+1}.$$

W kroku $t \rightarrow t+1$ wykonujemy następującą konstrukcję.

Rzucamy monetą. Z prawdopodobieństwem m wypada orzeł. Wtedy

$$X_{t+1} = Y_{t+1} = x',$$

gdzie x' wybieramy losowo z rozkładu

$$\left(\frac{m_i}{m} \right)_{i \in S}.$$

Z prawdopodobieństwem $1 - m$ wypada reszka. Wtedy:

$$X_{t+1} = x' \quad \text{z rozkładem} \quad \left(\frac{P(x, i) - m_i}{1 - m} \right)_{i \in S},$$

oraz

$$Y_{t+1} = y' \quad \text{z rozkładem} \quad \left(\frac{P(y, i) - m_i}{1 - m} \right)_{i \in S}.$$

Wówczas dla każdego $z \in S$ mamy

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = Y_{t+1} = z) \geq m \cdot \frac{m_z}{m} = m_z.$$

Odpowiedź

ckd

Zadanie 2 (Hubert Jastrzębski)

Rozważmy łańcuch Markowa $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ na zbiorze $\{0, \dots, k-1\}$ zdefiniowany następująco. Dla każdego $t \geq 0$, X_{t+1} otrzymujemy z X_t poprzez dodanie wyniku z rzutu sześcienną sprawiedliwą kostką i wzięcie reszty z dzielenia przez k . Udowodnij, że dla $k = 10$, $\tau_{\text{mix}} < 100$.

Rozwiązanie

Dla przypomnienia: $\tau_{\text{mix}} = \tau_{\text{mix}}(\frac{1}{4})$

Skorzystamy z lematu 10.3.2:

Niech $((X_t, Y_t))_{t \in \mathbb{N}}$ to sprzęganie łańcuchów Markowa (skończonych, nieprzywiedlnych, nieokresowych) z macierzą przejścia P i zbiorem stanów S . Niech $T \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$ będą takie, że dla każdego $x, y \in S$

$$\mathbb{P}(X_T \neq Y_T | X_0 = x, Y_0 = y) \leq \epsilon.$$

Wtedy dla każdego $x \in S$

$$\tau_{\text{mix}}(\epsilon) \leq T$$

Podstawiając $T = 99$ i $\epsilon = \frac{1}{4}$, wystarczy skonstruować sprzęganie takie, że dla każdego $x, y \in S$

$$\mathbb{P}(X_{99} \neq Y_{99} | X_0 = x, Y_0 = y) \leq \frac{1}{4}$$

Wtedy dostaniemy, że: $\tau_{\text{mix}} \leq 99$, co kończy dowód.

Aby móc zastosować lemat, zauważmy, że:

1. Łańcuch Markowa z zadania jest oczywiście skończony (ma 10 stanów)
2. Łańcuch jest nieprzywiedlny (z każdego stanu można przejść do każdego innego w skończonej liczbie kroków)
3. Łańcuch jest nieokresowy (z x do x można przejść w 10 krokach (10×1) lub 9 krokach ($8 \times 1 + 1 \times 2$), a $\text{gcd}(9, 10) = 1$)

Konstrukcja sprzęgania:

Dla dowolnego $x, y \in \{0, \dots, 9\}$ definiujemy sprzęganie $((X_t, Y_t))_{t \in \mathbb{N}}$ łańcucha z zadania, startujące z (x, y) :

1. Dopóki $X_t \neq Y_t$, łańcuchy poruszają się niezależnie.
2. Gdy $X_t = Y_t$, to łańcuchy poruszają się razem (tzn. $X_{t+1} = Y_{t+1}$).

Zauważmy, że dla dowolnego t , jeśli $X_t \neq Y_t$, to prawdopodobieństwo, że $X_{t+1} = Y_{t+1}$ wynosi co najmniej $\frac{1}{36}$.

Można to prosto udowodnić:

1. Mamy spotkanie, gdy $X_t + a \equiv Y_t + b \pmod{10}$, gdzie a, b to wyniki rzutów kostką.
2. Jest to równoważne z $a - b \equiv Y_t - X_t \pmod{10}$.

3. Różnica $Y_t - X_t$ może przyjmować wartości od 1 do 9 (bo $X_t \neq Y_t$).
4. Zbiór możliwych wartości $a-b$ to $\{-5, -4, \dots, 4, 5\} \equiv (\{0, 1, \dots, 9\})$ (bo $a, b \in \{1, 2, \dots, 6\}$).
5. Tak więc dla każdej wartości $Y_t - X_t$ istnieje para (a, b) , która spełnia powyższe równanie.

Zatem, dla dowolnego (x, y) startowego, mamy, że prawdopodobieństwo, że łańcuchy się nie spotkają po 99 krokach jest ograniczone przez:

$$\mathbb{P}(X_{99} \neq Y_{99} | X_0 = x, Y_0 = y) \leq \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{99} < \frac{1}{4}$$

Czyli mamy spełnione warunki lematu, a więc $\tau_{\text{mix}} < 100$.

Zadanie 3 (Patryk)

Niech P będzie macierzą przejścia skończonego, nieprzywiedlnego i nieokresowego łańcucha Markowa $(M_t)_{t \geq 0}$. Załóżmy, że istnieją stałe $c < \frac{1}{2}$ oraz $T \geq 0$ takie, że

$$\tau(c) \leq T.$$

Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\tau(\varepsilon) \leq \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2c)} \right\rceil T.$$

Rozwiązanie

Rozważmy dwa dowolne stany początkowe $X_0 = x$ oraz $Y_0 = y$. Z definicji czasu mieszania $\tau(c)$ otrzymujemy

$$\|P_x^T - \pi\|_{\text{TV}} \leq c \quad \text{oraz} \quad \|P_y^T - \pi\|_{\text{TV}} \leq c.$$

Stąd, z nierówności trójkąta,

$$\|P_x^T - P_y^T\|_{\text{TV}} \leq 2c.$$

Na mocy

Lematu o sprzęganiu (Lemat 12.3). Niech σ_X oraz σ_Y będą rozkładami prawdopodobieństwa na skończonej przestrzeni stanów S . Niech $Z = (X, Y)$ będzie dowolną zmienną losową o wartościach w $S \times S$, taką że X ma rozkład σ_X , a Y ma rozkład σ_Y . Wówczas

$$\Pr(X \neq Y) \geq \|\sigma_X - \sigma_Y\|_{\text{TV}}.$$

Ponadto istnieje sprzęgnięcie $Z = (X, Y)$, dla którego zachodzi równość:

$$\Pr(X \neq Y) = \|\sigma_X - \sigma_Y\|_{\text{TV}}.$$

istnieje sprzężenie

$$Z_{T,x,y} = (X_T, Y_T),$$

gdzie X_T ma rozkład P_x^T , a Y_T ma rozkład P_y^T , takie że

$$\mathbb{P}(X_T \neq Y_T) \leq 2c.$$

Rozważmy teraz nowy łańcuch Markowa (M'_t) o macierzy przejścia P^T . Odpowiada on wykonywaniu T kroków łańcucha (M_t) naraz. Dla tego łańcucha, przy powyższym sprzęganiu, jeśli dwie kopie łańcucha (M'_t) startują ze stanu (x, y) , to następny stan pary jest zadany przez rozkład $Z_{T,x,y}$, co implikuje, że prawdopodobieństwo braku sprzęgnięcia w jednym kroku wynosi co najwyżej $2c$.

Indukcyjnie otrzymujemy, że prawdopodobieństwo, iż sprzężenie łańcucha (M'_t) nie nastąpi w ciągu k kroków, jest co najwyżej

$$(2c)^k.$$

Z lematu o sprzęganiu wynika zatem, że łańcuch (M'_t) jest w odległości wariacyjnej co najwyżej ε od swojego rozkładu stacjonarnego po k krokach, o ile

$$(2c)^k \leq \varepsilon.$$

Warunek ten jest spełniony dla

$$k = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2c)} \right\rceil.$$

Ponieważ łańcuchy (M_t) oraz (M'_t) mają ten sam rozkład stacjonarny, a każdy krok łańcucha (M'_t) odpowiada T krokom łańcucha (M_t) , otrzymujemy

$$\tau(\varepsilon) \leq \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2c)} \right\rceil T.$$

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 4 (Pavlo Tsikalysyn)

Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem i niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą taką, że

$$k < \frac{n+2}{\Delta(G)+1}$$

Rozważa,my łańcuch Markowa, gdzie przestrzeń stanów $\Omega_k(G)$ jest rodziną wszystkich k -elementowych zbiorów niezależnych w G . Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie i niezależnie: $v \in M_t, w \in V(G)$. Wtedy $M_{t+1} = m(v, w, M_t)$ czyli: jeśli $M_t \setminus \{v\} \cup \{w\} \in \Omega_k(G)$, to $M_{t+1} = M_t \setminus \{v\} \cup \{w\}$; wpp. $M_{t+1} = M_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieprzywiedlny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Rozwiązanie

Do nieprzywiedlności wystarczy pokazać że z a da się dojść do dowolnego b . Pokażemy że z a da się dojść do wierzchołka c , który ma więcej wspólnych wierzchołków z b . Niech $\{x\} \in b$ oraz $\{x\} \notin a$ wtedy dopóki ilość krawędzi od x do wierzchołków z a większa od 1 to zamieniamy dowolny połączony z x na niepołączony*. Jeśli $\{x\}$ ma dokładnie 1 krawędź do a to zamieniamy po tej krawędzi, jeśli zero to zamieniamy x z dowolnym wierzchołkiem z a którego nie ma w b . To zawsze da się zrobić jeśli y możemy zamienić na dowolny wierzchołek niepołączony z $a \setminus y \cup x$, ilość wszystkich wierzchołków w $a \setminus y \cup x$ oraz ich sąsiadów będzie co najwyżej $(\Delta(G)+1)k-2$, bo będzie co najmniej jedna krawędź w środku.

$$(\Delta(G)+1)k-2 < (\Delta(G)+1)\frac{n+2}{\Delta(G)+1} - 2 = n+2-2 = n$$

Co oznacza że istnieje co najmniej jeden taki wierzchołek na który możemy zamienić y .

Nieokresowość mamy z tego że dla każdego z a mamy pętelkę do a kiedy $v = w$.

Jeśli $a, b \in \Omega_k(G)$ i istnieje krawędź z a do b , to istnieje krawędź z b do a . Z tego że istnieje krawędź z a do b , mamy że istnieją $v \in a$ oraz $w \in b$, $v, w \in V(G)$, $a \setminus \{v\} \cup \{w\} = b$. Wtedy zamieniamy v z w miejscami i otrzymujemy krawędź z b do a . Także każda krawędź która nie jest pętlą ma to same prawdopodobieństwo i ono jest równe $\frac{1}{k} \frac{1}{n}$. Z dwóch powyższych faktów dostajemy że jeśli rozkład będzie jednostajny to on przejdzie sam na siebie, co oznacza że on będzie stacjonarnym.

Zadanie 5 (Kamil)

Niech G będzie skończonym grafem spójnym na co najmniej dwóch wierzchołkach. Rozważmy łańcuch Markowa, gdzie przestrzeń stanów $\Omega(G)$ jest rodziną wszystkich zbiorów niezależnych w G . Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie i niezależnie: $uv \in E(G)$, $p \in \{1, 2, 3\}$.

- Jeśli $p = 1$, to $M'_t = M_t \setminus \{u, v\}$.
- Jeśli $p = 2$, to $M'_t = M_t \setminus \{u\} \cup \{v\}$.
- Jeśli $p = 3$, to $M'_t = M_t \setminus \{v\} \cup \{u\}$.

Jeśli M'_t jest zbiorem niezależnym w G , to $M_{t+1} = M'_t$, a w przeciwnym przypadku $M_{t+1} = M_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieprzywiedlny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Rozwiązanie

Niech $N = |E(G)|$ oznacza liczbę krawędzi w grafie.

1. Nieprzywiedlność

Łańcuch jest nieprzywiedlny, jeśli z każdego stanu S można dojść do każdego innego stanu T w skończonej liczbie kroków. Ponieważ wykazemy później, że łańcuch jest odwracalny, wystarczy pokazać, że z dowolnego zbioru niezależnego S można dojść do zbioru pustego $\emptyset$.

Wyberzmy dowolny wierzchołek $u \in S$.

1. Ponieważ G jest spójny i ma co najmniej 2 wierzchołki, istnieje krawędź $uv \in E(G)$.
2. Ponieważ S jest zbiorem niezależnym i $u \in S$, to z definicji $v \notin S$.

Wtedy weźmy krok łańcucha, w którym wylosowano krawędź uv oraz $p = 1$. $M' = S \setminus \{u, v\}$. Skoro $v \notin S$, operacja ta redukuje się do $M' = S \setminus \{u\}$. Zbiór M' (jako podzbiór zbioru niezależnego) jest nadal niezależny, więc przejście jest akceptowane z prawdopodobieństwem co najmniej $\frac{1}{3N}$.

Powtarzając tę procedurę dla każdego wierzchołka w S , redukujemy zbiór aż do osiągnięcia stanu $\emptyset$. Zatem graf przejść jest spójny.

2. Nieokresowość

Aby wykazać nieokresowość, wystarczy wskazać stan, dla którego prawdopodobieństwo pozostania w nim w jednym kroku jest dodatnie ($P(S \rightarrow S) > 0$).

Niech S będzie dowolnym zbiorem niezależnym. Rozważmy dowolną krawędź uv .

- **Przypadek A:** $u \notin S$ i $v \notin S$. Jeśli wylosujemy $p = 1$, to $M' = S \setminus \{u, v\} = S$. Stan nie ulega zmianie.
- **Przypadek B:** $u \in S$ (wtedy $v \notin S$). Jeśli wylosujemy $p = 3$ (operacja $M_t \setminus \{v\} \cup \{u\}$), to ponieważ $v \notin S$ i $u \in S$, otrzymujemy $M' = S$. Stan nie ulega zmianie.

W obu przypadkach istnieje niezerowe prawdopodobieństwo pozostania w stanie S . Zatem łańcuch jest nieokresowy.

3. Jednostajny rozkład stacjonarny

Aby udowodnić, że rozkład stacjonarny π jest jednostajny, wystarczy pokazać, że macierz przejścia jest symetryczna, czyli dla dowolnych stanów A, B :

$$P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$$

Przejścia zmieniające stan są możliwe tylko między zbiorami różniącymi się w obrębie dwóch wierzchołków

Przypadek 1: Zmiana liczby wierzchołków ($|A| = |B| + 1$)

Niech $A = B \cup \{u\}$, gdzie $u \notin B$. Aby przejście było możliwe, A musi być niezależny, więc żaden sąsiad u nie należy do B .

- **Przejście $A \rightarrow B$ (usunięcie u):** Wymaga wylosowania krawędzi uv incydentnej z u oraz $p = 1$ ($M' = A \setminus \{u, v\}$). Ponieważ $v \notin A$, usuwamy tylko u . Prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(A \rightarrow B) = \sum_{v \in N(u)} \frac{1}{3N} = \frac{\deg(u)}{3N}$$

- **Przejście $B \rightarrow A$ (dodanie u):** Wymaga wylosowania krawędzi uv incydentnej z u . Musimy dodać u . W stanie B nie ma u ani v . Dla $p = 3$ operacja to $B \setminus \{v\} \cup \{u\} = B \cup \{u\} = A$. Dla $p = 2$ operacja to $B \setminus \{u\} \cup \{v\} = B \cup \{v\} \neq A$. Zatem interesuje nas tylko $p = 3$:

$$P(B \rightarrow A) = \sum_{v \in N(u)} \frac{1}{3N} = \frac{\deg(u)}{3N}$$

Otrzymujemy $P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$.

Przypadek 2: Wymiana wierzchołka

Niech A zawiera u , B zawiera v , gdzie $uv \in E(G)$, a $A \setminus \{u\} = B \setminus \{v\}$.

- **Przejście $A \rightarrow B$:** Wymaga wylosowania konkretnej krawędzi uv oraz $p = 2$ ($A \setminus \{u\} \cup \{v\}$).

$$P(A \rightarrow B) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3N}$$

- **Przejście $B \rightarrow A$:** Wymaga wylosowania krawędzi uv oraz $p = 3$ ($B \setminus \{v\} \cup \{u\}$).

$$P(B \rightarrow A) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3N}$$

Tutaj również $P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$.

Wniosek: Macierz przejścia jest symetryczna, co z poprzedniego zestawu z łańcuchów Markowa wiemy, że daje nam rozkład stacjonarny, jednostajny.

Zadanie 6 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedź

Zadanie 7 (Wiktoria M)

Niech T_n będzie pełnym drzewem binarnym na n wierzchołkach. Rozważmy spacer losowy po T_n , gdzie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ stoimy w miejscu, a jeśli mamy wykonać ruch to wykonujemy go jednostajnie na jednego z sąsiadów. Zauważ, że rozkład stacjonarny odpowiednio zdefiniowanego łańcucha Markova istnieje. Pokaż, że τ_{mix} jest liniowy w terminach n .

Wskazówka: Jeśli $p, q, r \in [0, 1]$ takie, że $p + q + r = 1$, $p \neq q$ i rozważamy spacer na liczbach $[0, n]$ taki, że prawdopodobieństwo pozostania w miejscu to r , prawdopodobieństwo przejścia z i do $i - 1$ wynosi p , a prawdopodobieństwo przejścia z i do $i + 1$ wynosi q . Jeśli jesteśmy w punkcie 0 i mamy iść w lewo to zostajemy w miejscu, a jeśli jesteśmy w punkcie n i mamy iść w prawo to również zostajemy w miejscu. Niech X będzie zmienną losową będącą liczbą kroków potrzebnych do przejścia z n do 0. Wtedy

$$E(X) \leq \frac{1}{p - q} \left[n - q \left(\frac{1 - (q/p)^n}{p - q} \right) \right].$$

Rozwiązanie

Zacznijmy od rozkładu stacjonarnego. Łańcuch jest skończony i nieprzywiedlny, więc taki rozkład istnieje.

Rozważmy teraz sprzęganie łańcuchów Markova $((X_t, Y_t))_{t \in \mathbb{N}}$, których to macierz przejścia jest określona naszym grafem (możemy ponumerować wierzchołki od 0 do $n - 1$). Określamy X_{t+1}, Y_{t+1} na podstawie X_t, Y_t w następujący sposób:

- Jeśli X_t, Y_t były wierzchołkami z różną odległością od korzenia drzewa, to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$: $X_{t+1} = X_t$, natomiast Y_{t+1} wybieramy jednostajnie spośród sąsiadów Y_t , i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$: $Y_{t+1} = Y_t$, natomiast X_{t+1} wybieramy jednostajnie spośród sąsiadów X_t .
- Jeśli X_t, Y_t na tym samym poziomie drzewa, to wybieramy ten ruch który wykonujemy na obu tych zmiennych - czyli z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ będzie $X_{t+1} = X_t, Y_{t+1} = Y_t$, albo wybieramy jednostajnie z sąsiadów tych wierzchołków do którego idziemy (w obu idziemy

do lewego dziecka/w obu do rodzica/w obu do prawego dziecka). To zapewnia, że gdy raz X_t, Y_t będą na jednym poziomie w drzewie, to już zawsze będą na tym samym poziomie.

Niech $Z = Z_1 + Z_2$ - oczekiwana liczba kroków po których $X_t = Y_t$ (tu już chodzi nam o konkretnie ten sam wierzchołek, nie tylko poziom).

Z_1 to oczekiwana liczba kroków po których X_t, Y_t znajdą się na tym samym poziomie. Zauważmy, że $D_t = |\text{poziom}(X_t) - \text{poziom}(Y_t)|$ możemy sprowadzić do spaceru symetrycznego z dwoma barierami w 0 i $\log_2 n$, bo w każdym kroku różnica między poziomami zmienia się o co najwyżej 1. Z przypomnienia o spacerach losowych oczekiwana liczba kroków do uderzenia w 0 niezależnie od miejsca startu mieści się w $O((\log_2 n)^2)$.

Z_2 to oczekiwana liczba kroków po których $X_t = Y_t$ od momentu gdy znajdą się na tym samym poziomie w drzewie. Zauważmy, że jest ona nie większa niż oczekiwana liczba kroków przejścia X_t, Y_t z liści do korzenia, co znowu możemy zinterpretować przez spacer niesymetryczny z dwoma barierami. Czyli ze wskazówki mamy (u nas $p = \frac{1}{6}, q = \frac{1}{3}$):

$$E[Z_2] \leq \frac{1}{p-q} \left[\log_2 n - q \left(\frac{1 - (q/p)^{\log_2 n}}{p-q} \right) \right] = -6 \log_2 n - 12 + 12 \cdot 2^{\log_2 n} = \theta(n)$$

Wyżej zostało zamienione n ze wskazówki na $\log_2 n$, bo tutaj jest spacer ograniczony przez 0 i wysokość drzewa, czyli $\log_2 n$.

Mamy więc, że $E[Z] \leq cn$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$.

Korzystamy teraz z lematu 10.3.2, przytoczonego m.in. w zadaniu 2. Tutaj mamy (po drodze korzystając z nierówności Markova):

$$P(X_t \neq Y_t | X_0 = x, Y_0 = y) = P(Z > t) \leq \frac{E[Z]}{t} \leq \frac{cn}{t}$$

Dla $t = 4cn$ mamy:

$$P(X_t \neq Y_t | X_0 = x, Y_0 = y) \leq \frac{1}{4}$$

Więc z lematu dostajemy

$$\tau_{mix} = \tau_{mix}(\epsilon) = \tau_{mix}\left(\frac{1}{4}\right) \leq 4cn = O(n)$$

Zadanie 8 (Krzysztof Peszko)

Niech G będzie n -wierzchołkowym grafem takim, że stopień każdego wierzchołka to dokładnie $\frac{2}{3}n$ (można założyć, że $n \leq 3$ i n jest podzielne przez 3). Rozważmy klasyczny spacer losowy po G , gdzie w kroku wybieramy jednostajnie jednego ze swoich sąsiadów.

(I) Udowodnij, że istnieje rozkład stacjonarny.

(II) Ogranicz, najlepiej jak umiesz czas mieszania τ_{mix}

Rozwiązanie

(I) Graf jest spójny. Zauźmy, że tak nie jest. Weźmy wierzchołki u i v z dwóch spójnych. Każdy z nich ma $\frac{2}{3}n$ sąsiadów. Z bycia w innych spójnych, konkludujemy, że sąsiedzi są różni. Jeśli zsumujemy sąsiadów u i v otrzymujemy $\frac{4}{3}n$ wierzchołków, co jest sprzecznością, bo graf ma n wierzchołków.

Równie łatwo, można pokazać, że graf jest nieokresowy. (Graf okresowy może mieć maksymalnie $\frac{1}{4}n^2$ krawędzi, a nasz graf ma $\frac{2}{3}n^2$)

Łatwo też pokazać, że rozkład stacjonarny tego grafu to dla każdego v $\frac{1}{n}$

(II) Wiemy, że $\tau_{\text{mix}} = \max(\tau_x(\frac{1}{4}))$. Gdzie $\tau_x(\epsilon)$ to minimalny czas t , że różnica wektorowa między wektorem w czas t , a rozkładem stacjonarnym, znana jako $\Delta_x(t)$.

Teraz zobaczmy co się dzieje z przy ruchu t . Niech zbiór A , to zbiór, gdzie wartość jest większa niż rozkład stacjonarny w czasie $t + 1$, a B to zbiór, gdzie jest mniejsza. Teraz patrzmy co się wydarzy z wartością wyeksportowaną z wierzchołka v . Zauźmy, że w momencie t , v miało wartość większą niż w rozkładzie stacjonarnym. Popatrzmy co się dzieje, jeśli połączymy z jakimś wierzchołkiem z A , nadwyżka zostanie przekazana. Jeśli natomiast przełączymy do B , to zostania zaprzepaszczona. W drugą stronę to działa podobnie. Zeby pokazać, ile zostanie zaprzepaszczone, można wywnioskować następujące równania:

$$\frac{\frac{2}{3}n - |A|}{\frac{2}{3}n} + \frac{\frac{2}{3}n - |B|}{\frac{2}{3}n} = \frac{\frac{4}{3}n - |A| - |B|}{\frac{2}{3}n} = \frac{\frac{4}{3}n - n}{\frac{2}{3}n} = \frac{\frac{1}{3}n}{\frac{2}{3}n} = \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że z każdym minięciem sekundy różnica wektorowa maleje $\frac{1}{2}$ raza.

W $t = 0$, wszystko znajduje się w jakimś wierzchołku v . W $t = 1$, jest w $\frac{2}{3}n$ wartość $\frac{1}{\frac{2}{3}n}$, a w pozostałych 0. Licząc różnice wektorową mamy:

$$\frac{2}{3}n \cdot \left(\frac{3}{2n} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}n \cdot \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

W $t = 2$ mamy więc wartość $\leq \frac{1}{3}$, a w $t = 3$ wartość $\leq \frac{1}{6}$, co jest mniejsze niż wymagana $\frac{1}{4}$, z wykładu.

Odpowiedź

Zadanie 9 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 10 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz

Zadanie 11 (Autor/ka)

tutaj wpisz treść zadania

Rozwiązanie

tutaj wpisz rozwiązanie

Odpowiedź

tutaj daj odpowiedz